# masalah kita

## PENERAPAN MODEL KELAMBATAN WAKTU DALAM PENELITIAN DAN PERENCANAAN PERTANIAN

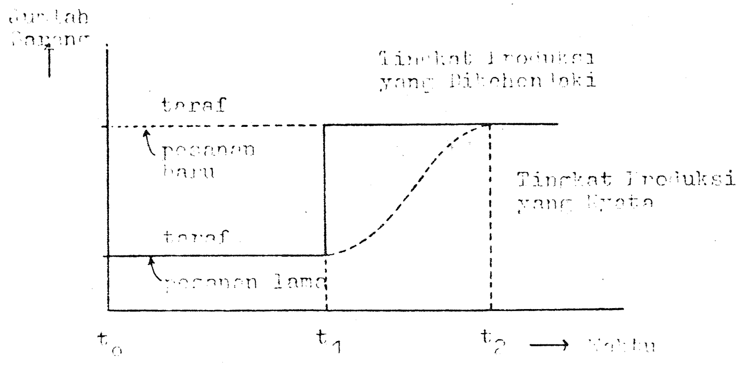
**Bambang Prastowo**
**Balai Penelitian Tanaman Pangan Maros**

### Pendahuluan

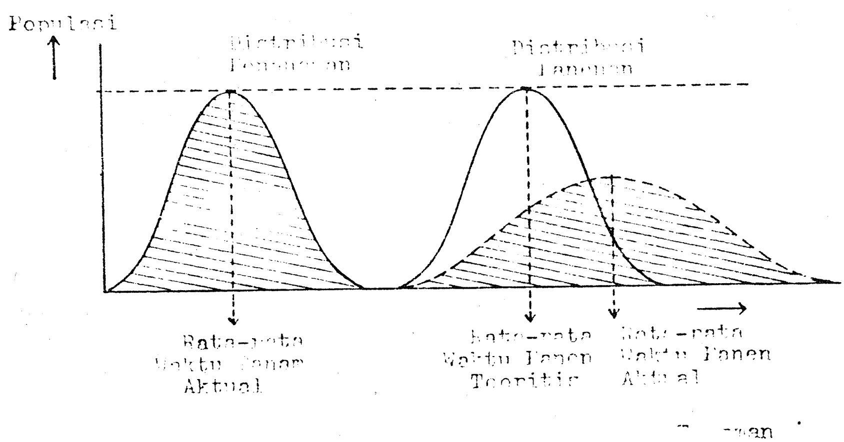
Adalah mungkin untuk dibuat rancangan banyak sistem, tanpa menggunakan matematik ataupun memahami matematik tanpa analisa sistem. Namun demikian, penggunaan matematik secara tepat dapat membuat banyak problem tentang, sistem terpecahkan secara lebih mudah sekalipun kadang-kadang persoalan tersebut sangat rumit. Selain itu, keluwesan matematik maupun notasi-notasinya akan memberi kemudahan dalam hal komunikasi maupun pengalihan metoda-metoda yang telah dikembangkan pada suatu negara/disiplin ke negara/disiplin lainnya.

Bagaimanapun telah disadari, bahwa analisa permasalahan secara matematis telah menjadi hal yang penting dalam bidang ekonomi, teknik, ilmu alam maupun ilmu sosial. Dasar idenya cukup sederhana, yaitu bahwa operasi-operasi model matematik yang disusun erat kaitannya dengan "phenomena" sistem dunia nyata yang dipelajari.

Dalam mempelajari sistem dengan model, para peneliti biasanya tidak hanya tertarik pada kondisi awal ataupun antaranya, tetapi juga lintasan-lintasan dalam "phenomena" yang berhubungan dengan waktu. Hal ini terutama dikaitkan dengan keadaan senyatanya, bahwa banyak sistem dimana hasil atau responnya merupakan suatu peubah yang bersifat "lag"/"delayed" atau terlambat dari peubah-peubah masukannya (Gambar 1 dan 2). Misalnya dalam sistem produksi suatu barang dalam kaitannya dengan pesanan yang harus dipenuhinya. Juga dalam sistem pendewasaan/pemasakan suatu tanaman. Banyak lagi model-model kelambatan, yang biasanya terdapat dalam sistem model yang dinamis, yang akan lebih mudah diterangkan secara matematis. Secara singkat dapat dikatakan bahwa model kelambatan waktu biasanya akan cukup bermanfaat untuk dikembangkan bagi model-model dalam



Gambar 1. Kelambatan pad Sistem Produksi (2)



Gambar 2. Kelambatan pada Sistem Pemasakan Tanaman

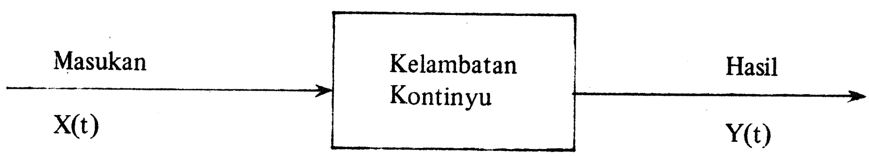
proses-proses yang a) tak dapat diubah ("irreversible") dan b) bersifat alir dan bergerak pada kecepatan yang berbeda dalam proses itu (3).

Penggunaan model tersebut juga banyak dijumpai misalnya dalam pembuatan model siklus hidup serangga, model populasi ternak, tanaman dan lain-lain. Pada pembuatan model untuk populasi pohon dapat ditunjukkan sebagai suatu seri umur tanaman, yang mewakili tahap-tahap produktivitasnya (Gambar 2). Pada suatu penanaman pohon dalam waktu yang bersamaan, maka pada satu umur tertentu setiap tanaman tidak akan mempunyai produktivitas yang sama. Pohon satu mungkin sudah dapat ditebang (untuk diambil kayunya), sedangkan pohon yang lain belum tentu memenuhi syarat untuk ditebang. Demikian juga untuk tanaman lain misalnya pada panenan padi maupun tanaman pangan lainnya. Hal ini disebabkan ketergantungan akan sifat-sifat genetik maupun kondisi lingkungan masing-masing satuan tanaman (1).

Contoh-contoh tersebut merupakan proses-proses di mana fungsi kelambatan adalah kontinyu. Pada sistem transportasi, misalnya pada sistem pengangkutan barang oleh traktor dan gerobaknya, maka proses didalamnya dapat digolongkan kedalam proses-proses yang tidak kontinyu ("discrete"). Dalam tulisan ini hanya akan diuraikan mengenai proses-proses yang kontinyu.

**Model Kelambatan Waktu Kontinyu**

Secara diagram masukan – hasil, suatu proses dapat digambarkan seperti gambar berikut :



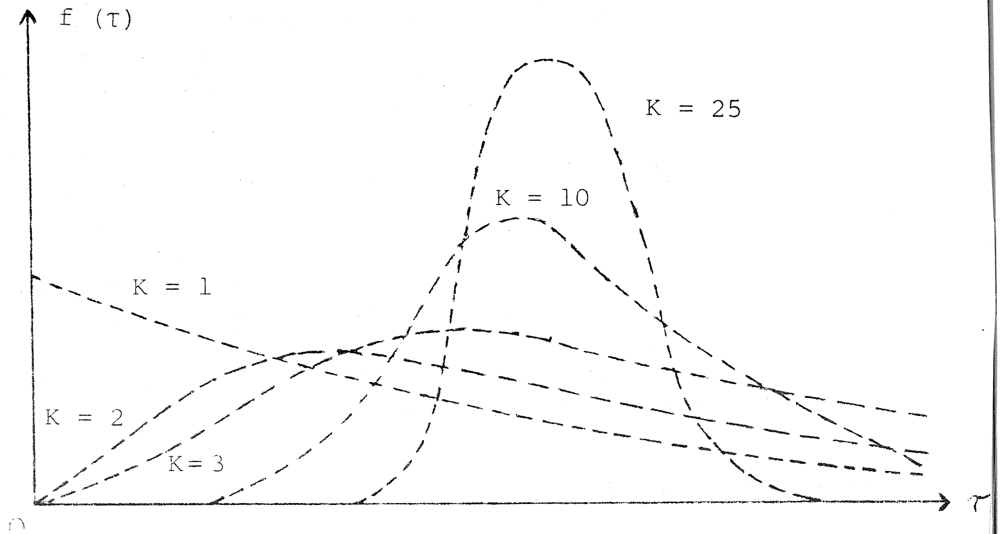

Kelambatan kontinyu dapat didefinisikan sebagai suatu persamaan diferensial :

$$X(t) = a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} + a_{k-1} \frac{d^{k-1} y(t)}{dt^{k-1}} + \ldots + a_1 y(t) \ldots\ldots\ldots (1)$$

k – disebut juga orde kelambatan.
Fungsi pindahnya ("Transfer Function") secara umum menjadi :

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{D_i S + 1} \ldots\ldots\ldots (2)$$

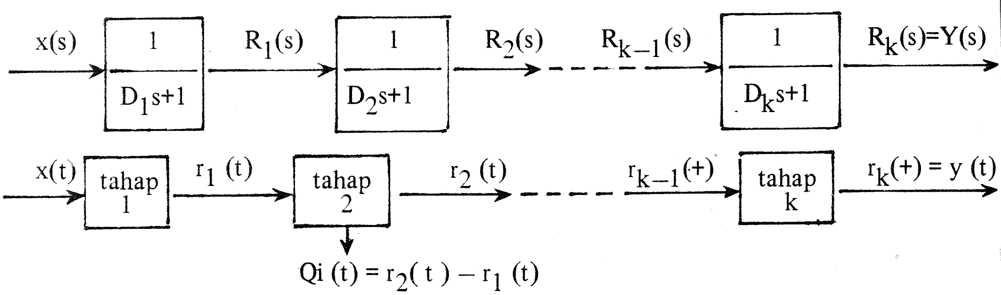
s – operator laplace
Di = DEL/k
DEL – rata-rata waktu kelambatan
k – tetapan pada fungsi distribusi kerapatan Erlang (Gambar 3)




Gambar 3. Fungsi-fungsi Kerapatan Erlang

DEL dan k dapat dipilih sedemikian hingga perlambatan sesuai dengan "phenomena" yang dipelajari. Jika tersedia data mengenai perubahan waktu dari contoh ("sample") yang sedang diteliti, maka nilai-nilai tersebut dapat dipakai untuk memperkirakan nilai DEL dan K yang lebih sesuai (3).

Pada kelambatan orde k, secara diagram dapat digambarkan sebagai berikut :




Pada tahap ke i maka :

$$D_i \frac{dr_i(t)}{dt} + r_i(t) = r_{i-1}(t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$r_i(t)$ – hasil dari tahap ke i

$r_{i-1}(t)$ – masukan ke tahap ke i

$$\frac{Dr_i(t)}{dt} = \frac{1}{Di}\left[r_{i-1}(t) - r_i(+)\right] = \frac{k}{DEL}\left[r_{i-1}(t) - r_i(t)\right] \quad \ldots(4)$$

Dalam pembuatan model untuk proses-proses yang nyata, biasanya dijumpai bahwa perlambatan proses merupakan fungsi waktu. Misalnya pada populasi biologi (tanaman, ternak), maka kecepatan pemasakan/pendewasaan akan tergantung pada tingkat temperatur, hara dan lain-lain. Oleh karena itu, dalam tulisan ini, DEL digunakan sebagai hal yang dipengaruhi oleh faktor waktu, yaitu menjadi DEL (t).

Jika diambil aliran yang tersimpan (masih dalam proses) adalah $Q_i$ (t), maka :

$$Qi(t) = \frac{DEL(t)}{k}\, r_i(t)$$

$$\frac{dQi(t)}{dt} = r_{i-1}(t) - r_i(t)$$

Jadi, aliran tetap dalam tahap ke i adalah :

$$\frac{dri}{di} = \frac{k}{DEL(t)}\left[r_{i-1}(t) - r_i(t)\left(1 + \frac{1}{k}\,\frac{dDEL(t)}{dt}\right)\right] \quad \ldots\ldots(5)$$

Untuk k tahap, maka :

$$\frac{dr_i}{dt} = \frac{k}{DEL(t)}\left[x(t) - r_i(t)\left(1 + \frac{1}{k}\,\frac{dDEL(t)}{dt}\right)\right]$$

$$\frac{dr_2}{dt} = \frac{k}{DEL(t)}\left[r_1(t) - r_2(t)\left(1 + \frac{1}{k}\,\frac{dDEL(t)}{dt}\right)\right]$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{DEL(t)}\left[r_{k-1}(t) - y(t)\left(1 + \frac{1}{k}\,\frac{dDEL(t)}{dt}\right)\right] \quad \ldots(6)$$

x ( t ) – masukan ke dalam proses

y ( t ) = $r_k$( t ) – hasil dari proses

Dengan pengintegrasian persamaan (6) dengan selang t dan t + $\Delta$ t, maka

$$\int_{\tau=t}^{tt\,\Delta t} \frac{dr_1(\tau)}{d}\, d\tau = \int_{t}^{tt\,\Delta\, t} \frac{k}{DEL(\tau)}\left[x(\tau) - r_1(\tau)\left(1 + \frac{1}{k}\,\frac{dDEL(\tau)}{d}\right)\right]$$

$$\int_{\tau=t}^{tt\,\Delta t} \frac{dr_2(\tau)}{d\tau}\, d\tau = \int_{t}^{tt\,\Delta t} \frac{k}{DEL(\tau)}\; r_1(\tau) - r_2(\tau)\;\; 1 + \frac{1}{k}\; \frac{dDEL(\tau)}{d}$$

$$\int_{\tau=t}^{t+\Delta t} \frac{dy(\tau)}{d\tau}\, d\tau = \int_{t}^{t+\Delta t} \frac{k}{DEL(\tau)} \left[ r_{k-1}(\tau) - y(\tau)\left(1 + \frac{1}{k}\, \frac{dDEL(\tau)}{d\tau}\right)\right] \quad .....(7)$$

Dianggap bahwa : $$\frac{dDEL(t)}{dt} \approx \frac{DEL(t) - DEL(t-\Delta t)}{\Delta t} \quad ...(8)$$

Berdasarkan persamaan (8) dan integrasi Euler, maka

$$r_1(t+\Delta t) = r_1(t) + \frac{k\,\Delta t}{DEL(t)}\left[x(t) - r_1(t)\left(1 + \frac{DEL(t) - DEL(t-\Delta t)}{k\,.\,\Delta t}\right)\right]$$

$$r_2(t+\Delta t) = r_2(t) + \frac{k\,\Delta t}{DEL(t)}\left[r_1(t) - r_2(t)\left(1 + \frac{DEL(t) - DEL(t-\Delta t)}{k\,.\,\Delta t}\right)\right]$$

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \frac{k\,\Delta t}{DEL(t)}\;\; r_{k-1}(t) - y(t)\;\; 1 + \frac{DEL(t) - DEL(t-\Delta t)}{k\,.\,\Delta t} \quad ....(9)$$

Persamaan (9) dengan mudah dapat diubah ke program komputer, yang akan sangat berguna dalam simulasi model kelambatan. Program komputer tersebut dalam bahasa FORTRAN IV adalah sebagai berikut (3) :

```
SUBRØUTINE VDEL (VIN, VØUT, R, DEL, DEL, DT, K)
DIMENSION R (1)
FK    =  FLØAT (K)
A     =  DT*FK/DEL
V     =  VIN
DELD  =  (DEL – DELP ) / (DT * FK)
DELP  =  DEL
DØ 1 I =  1, K
DR    =  R (I)
R (I) =  DR + A * (V – DR * ( 1. + DELD) )
V     =  DR
VØUT  =  R ( K )
RETURN
END
```

**Keterangan :**

VIN — peubah masukan pada proses perlambatan
VØUT — peubah hasil pada proses perlambatan

R — "array" ke $k$, yaitu hasil pada tahap ke $k$ pada proses perlambatan $r_1(t), r_2(t)_1 \ldots\ldots r_k(t) = y(t)$ jadi DIMENSIØN R adalah sama dengan K
K = 6 maka DIMENSIØN R ( 6 )
DEL — rata-rata kelambatan proses pada saat $t$
DELP — nilai DEL sebelumnya, yaitu DELP = DEL ( $t - \Delta t$ )
DT — perubahan waktu ("increment") yang digunakan, yaitu $\Delta t$
K — jumlah tahapan dalam proses, yaitu $k$

Nilai DEL harus dihitung di luar SUBRØUTINE dan nilai DELP awal harus diberikan sebelum mulai memanggil SUBRØUTINE.

Manetsch (3) telah mencoba memberi contoh penggunaan model kelambatan ini untuk penelitian/perencanaan dalam rangka mempelajari tahap pertumbuhan populasi serangga dan proses pelaksanaan pekerjaan pembukaan lahan atau irigasi dan lain-lain.

Populasi serangga pada pokoknya mempunyai sifat, bahwa waktu yang diperlukan untuk pendewasaan dari satu tahap ("instar") pertumbuhan ke tahap lainnya secara langsung berhubungan dengan temperatur "ambient". Pendewasaan serangga bertambah cepat jika temperatur lebih besar dari temperatur ambang To, dan akan berhenti jika temperatur "ambient" lebih rendah atau sama dengan temperatur ambang To. Jika DELM adalah rata-rata waktu yang diperlukan untuk berpopulasi dalam suatu tahap pertumbuhan, maka hal itu ditentukan oleh waktu yang diperlukan untuk berpopulasi dalam mengakumulasi sejumlah derajat–hari ("degree–days") TDD.

Jadi :

$$TDD = \int_0^{DELM\,(t)} MAX \left[ 0,\ (T(t) - To) \right] dt \ldots\ldots\ldots (10)$$

**Keterangan :**

To — temperatur "ambient"
T (t) — temperatur ambang
MAX — fungsi maksimum
TDD — total derajat-hari diperlukan untuk pendewasaan melalui suatu tahap pertumbuhan tertentu.

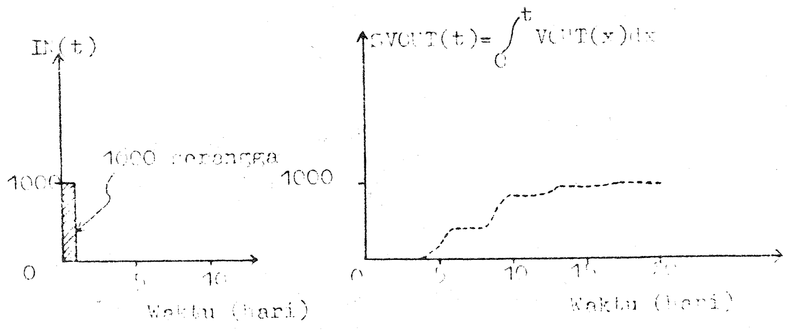
Jika dianggap bahwa kecepatan pertumbuhan berbanding lurus dengan perbedaan T(t)–To, maka

$$DEL\ (t) = \frac{TDD}{MAX\ [\ T(t) - To), 0]} = \frac{TDD}{f(t)} \ldots\ldots (11)$$

DEL (t) adalah nilai kelambatan pendewasaan saat t (kebalikan dari kecepatan pertumbuhan)

$$\mathrm{DEL} = \infty \text{ , jika } \quad [\ T(t) - To\ ] \leqslant 0$$
$$\mathrm{DEL} = \mathrm{TDD} \text{, jika } \quad [\ T(t) - To\ ] = 1$$

Dalam contoh ini dianggap TDD = $60^{o}$ F – hari dan
$f(t) = \mathrm{MAX}\ [\ 20 \sin 0{,}5\ \pi\ t{,}0\ ]$
Dengan menganggap bahwa satu tahap pertumbuhan yang dimodel mengikuti fungsi kelambatan orde 6 dan pada saat t = 0 jumlah serangga yang masuk tahap tersebut adalah 1000 (Gambar $4_a$ dan $4_b$), maka jumlah total serangga yang keluar dari tahap tersebut adalah seperti pada Gambar 4b.

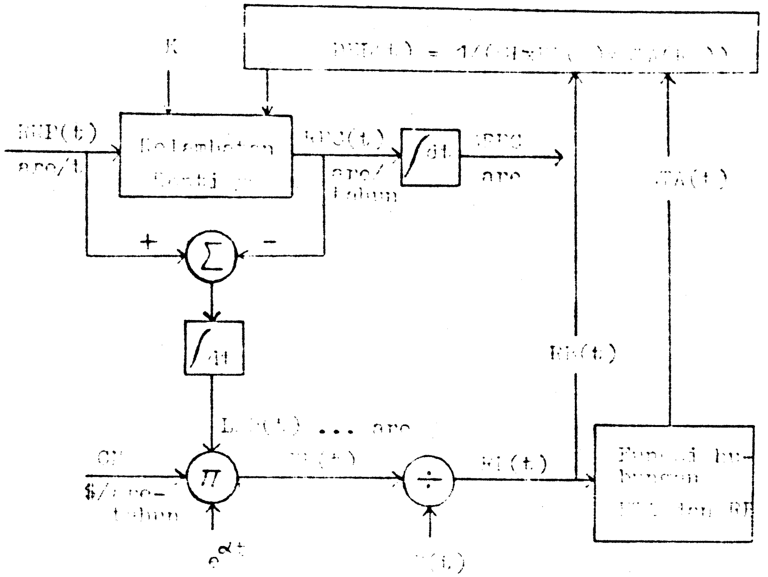



Gambar 4. **Hasil Simulasi dalam Pendewasaan Sarangga**

Dengan menggunakan data penelitian lapangan atau lainnya, dapat dipelajari ketepatan dari model sistem yang dibuat. Model yang telah diuji tentu akan sangat berguna bagi penelitian-penelitian/perencanaan maupun prediksi mengenai populasi serangga maupun dampaknya pada penelitian/waktu selanjutnya.

Dalam pelaksanaan pekerjaan pembukaan lahan secara mekanis atau lainnya, umumnya perhatian ditujukan kepada waktu yang diperlukan untuk penyelesaian pekerjaan tersebut. Manetsch (3) menyebutkan bahwa hal-hal seperti tersebut diatas biasanya akan tergantung dari masukan-masukan yang diberikan. Jadi tidak jarang, bahwa pelaksanaan pekerjaan akan terlambat karena kurangnya masukan modal, peralatan, bahan-bahan maupun tenaga kerjanya.

Dalam pembuatan model ini, yang penting adalah mengkaitkan dengan proses pelaksanaan pekerjaan, pengaruh kecepatan penyediaan masukan dan dampaknya jika pekerjaan tersebut selesai serta biaya pelaksanaannya.




**Gambar 5. Diagram Blok Proses Pelaksanaan Proyek berdasarkan Model Kelambatan Kontinyu**

**Keterangan** :

RNP – luas areal yang harus dikerjakan (are/tahun)
RPC – luas areal yang telah diselesaikan (are/tahun)
LND – luas areal yang masih dalam proses pengerjaan (are)
BR – alokasi anggaran untuk pengerjaan LND pada kecepatan penyelesaian yang optimum ( $ / tahun )
CN – biaya optimum pengerjaan proyek per are per tahun ( $ / are-tahun )
L – tetapan untuk perubahan harga, inflasi dan lain-lain dalam contoh dianggap bahwa tetapan ini mengikuti kasus perubahan secara eksponensial.
B – anggaran yang nyata dialokasikan untuk pelaksanaan kegiatan ( $ / tahun )
DEL– waktu yang diperlukan untuk pelaksanaan pekerjaan (tahun)
– dianggap bahwa pekerjaan merupakan proses aliran yang bersifat agregat dan dipengaruhi oleh unsur waktu yang terkait unsur acak yang mengikuti distribusi Erlang, dengan rata-rata DEL dan parameter K.

RB – risbah antara B(t) dan BR(t) dan BR(t)
ETA – efisiensi penggunaan modal dalam pelaksanaan pekerjaan proyek ( $0 \leqslant$ ETA $\leqslant 1$ ).
CP – Proporsi penyelesaian pekerjaan per satuan waktu, jika RB = 1

Berdasarkan model diagram seperti pada Gambar 5, maka areal yang masih dalam proses pengerjaan (are) adalah :

$$\mathrm{LND}(t) = \mathrm{LND}(0) + \int_{x=0}^{t} \mathrm{RNP}(x) - \mathrm{RPC}(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Agar seluruh anggaran dapat dialokasikan secara efisien (pada biaya minimum per unit pekerjaan) maka :

$$\mathrm{BR}(t) = \mathrm{LND}(t) * \mathrm{CN} * e^{\alpha t}$$

Peubah ETA mempengaruhi waktu kelambatan dari pelaksanaan proyek DEL; jadi kecepatan penyelesaian proyek dapat ditunjukkan sebagai proporsi penyelesaian pekerjaan per unit waktu, yaitu PROG ( t ), sedangkan CP adalah proporsi penyelesaian pekerjaan per unit waktu jika RB = 1

$$\mathrm{PROG}(t) = \mathrm{CP}\ \ \mathrm{RB}(t)\ \mathrm{ETA} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

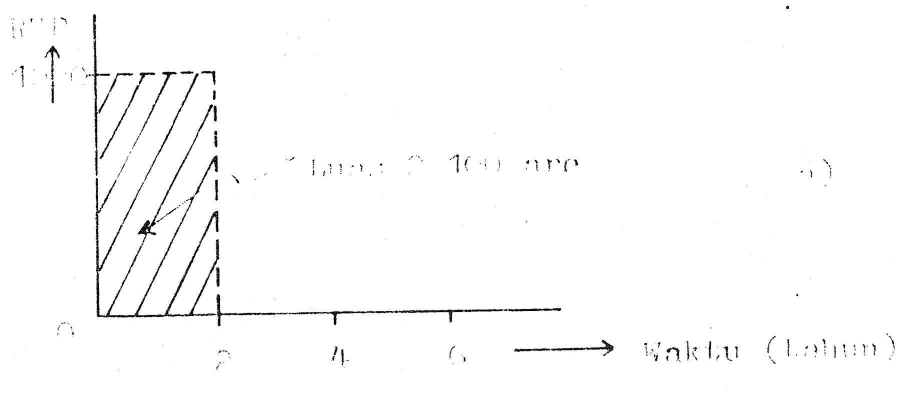
Jadi rata-rata Kelambatan (kebaikan PROG ( t ) ), yaitu antara awal penyelesaian pekerjaan dan selesainya proyek) :

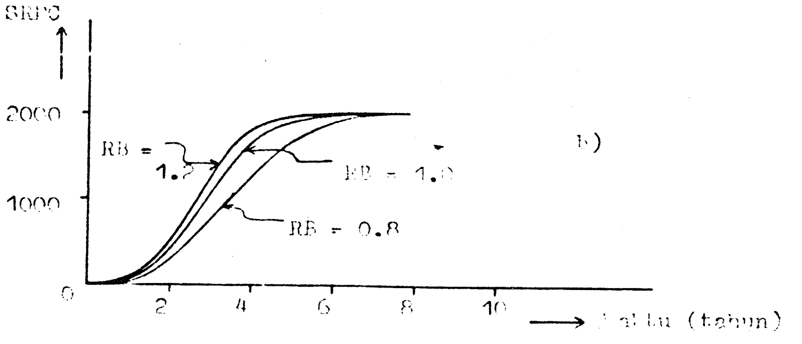
$$\mathrm{DEL}(t) = 1/(\mathrm{CP} * \mathrm{RB}(t) * \mathrm{ETA})$$

Dalam mengukur hasil operasi sistem, dapat digunakan total satuan pekerjaan (are) yang telah diselesaikan, yaitu :

$$\mathrm{SRPC}(t) \int_{0}^{t} \mathrm{RPC}(x)dx$$

Hasil simulasi model sistem adalah seperti pada Gambar 6.






**Gambar 6. Hasil Simulasi Pelaksanaan Proyek berdasarkan Model Kelambatan Kontinyu**

Terlihat pada Gambar 6, bagaimana pengaruh alokasi anggaran ( RB ) terhadap penyelesaian suatu pekerjaan.

**Penutup**

Penggunaan model Kelambatan waktu untuk simulasi akan banyak dijumpai dalam proses-proses agregat yang "irreversible" di mana kelambatannya biasanya merupakan fungsi dari waktu. Hasil ini akan banyak dijumpai pada proses-proses biologi, pisik, ekonomi maupun sosial.

Jika dapat disusun model sistemnya, maka banyak waktu dan biaya yang bisa dihemat dalam melaksanakan penelitian maupun perencanaan pertanian. Hal ini disebabkan adanya kemudahan dalam mengubah-ubah parameter-parameter sistem, melalui operasi komputer, tanpa mencobanya lebih dahulu dilapangan. Bahkan seringkali, hal-hal yang tak mungkin dikerjakan di lapangan (sangat sulit, mahal atau sangat lama) dapat diketahui hasilnya melalui percobaan secara simulasi komputer. Kesemuanya itu menuntut peneliti untuk betul-betul menguasai permasalahan yang akan diteliti dan yang akan dimodelkan.

## DAFTAR PUSTAKA


1. Abkin, M.H. and C. Wolf. 1976. Distributed Delay with Storage Losses and Variable Delay Time. M.S.U. Class on Computer Library for Agric. Systems Simulation. Unpublished. 11p.

2. Manetsch, Thomas J. and Gerald L. Park. 1974 Systems Analysis and Simulation with Application to Economic and Social Systems. Part I and II. Prelimenary Edition.. Dept. of Elec. Eng. and System Science. M.S.U. Michigan.

3. Manetsch, Thomas J. 1976. Time–Varying Distributed Delays and Their Use in Aggregative Models of Large Systems. IEEE Trans. Systems, Man and Cy bernetics. SMC–6 (8) : 547–553.