MODEL MATEMATIKA METODE PENJEJAK PARAMETER SEBAGAI PEMERKIRA PARAMETER FISIKAWI BAHAN MAKANAN

Oleh:

***Budi Rahardjo*[*]**

Abstract

Parameter tracking method was used to estimate mathematically the physical parameters of food. Five mathematical models of the food properties were studied: linear model with one parameter, linear model with two parameters, non linear model with two parameters, exponential model with two parameters and non linear model with three parameters. The parameters of the first four mathematical models can be estimated using the parameter tracking method. Analytical solution of the fifth model that indicates whether the parameters will converge to their real values can not be found.

Pendahuluan

Parameter fisikawi bahan makanan diperlukan dalam pengolahan bahan makanan maupun untuk perancangan alat pengolah pangan. Parameter yang dimaksud antara lain berupa viscositas, konsistensi, indek aliran, difusitas panas, parameter dinamis buah, dan sebagainya. Metode pengukuran untuk parameter tersebut telah tersedia (Rao dan Rizvi, 1986; Peleg dan Bagley, 1983). Namun umumnya pengukuran parameter tersebut dilakukan secara terputus yaitu dengan mengambil sampel atau contoh bahan dalam selang waktu tertentu. Untuk beberapa hal diperlukan pengukuran yang berkesinambungan dalam kaitannya dengan pengendalian kualitas hasil, seperti halnya pegukuran suhu atau tekanan yang dapat dilakukan secara berkesinambungan yang kemudian dikaitkan dengan pengoperasian alat pengendali proses (*process control*).

Pengukuran parameter bahan makanan dilaksanakan dengan mengukur perubah bebas dan perubah gayut. Tergantung model matematika hubungan kedua perubah, parameter hubungan kedua perubah tersebut dihitung dengan metode regresi linier atau metode lain yang sesuai. Model matematika hubungan tersebut dapat berupa hubungan linier maupun hubungan tak linier dengan satu, dua atau tiga parameter (Mohsenin, 1970; Rao dan Rizvi, 1986; Peleg dan Bagley, 1983).

Penjejak parameter adalah metode untuk mengestimasi parameter suatu sistem yang telah diketahui model matematika hubungan antara masukan dan keluarannya (Doebelin, 1986). Dengan menggunakan sinyal masukan dan keluaran metode ini dapat "menghitung" parameter suatu sistem secara berkesinambungan. Keberhasilan perhitungan tersebut tergantung pada ketepatan pemilihan model matematika sistem dan model matematikanya sendiri. Tujuan penelitian ini adalah untuk menganalisa beberapa model matematika parameter fisikawi bahan makanan dan kemungkinan memperkirakan parameternya dengan menggunakan metode penjejak parameter.

Teori

Hubungan antara masukan (input) x dan keluaran (output) z suatu sistem dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$z = f(x) \qquad (1)$$

[*]Staf Pengajar di Fakultas Teknologi Pertanian Universitas Gadjah Mada.

Kedua sinyal masukan x ke dan keluaran z dari sistem berupa sinyal yang gayut dengan waktu. Keduanya dihubungkan oleh f(x) yang mengandung parameter a. Misalkan $a^*(t)$ merupakan pemerkira a, maka kesalahan pemerkiraan E(t) yang terjadi akan berupa:

$$E(t) = f^*(x) - f(x) \qquad (2)$$

Keluaran $f^*(x)$ merupakan estimasi f(x) dengan menggunakan pemerkira parameter a^*. Doebelin (1986) memberikan definisi laju perubahan pemerkira sebagai berikut:

$$\frac{da^*}{dt} = -G \frac{\partial E^2}{\partial a^*}$$

$$= -2G\,[f^*(x) - f(x)] \frac{\partial f^*(x)}{\partial a^*} \qquad (3)$$

Integrasi persamaan (3) akan menghasilkan persamaan pemerkira sebagai fungsi waktu yang berupa:

$$a^*(t) = -2G \int_0^t [f^*(x) - f(x)] \frac{\partial f^*(x)}{\partial a^*}\, d\tau + c \qquad (4)$$

Dari persamaan (4) dalam selang waktu tertentu diharapkan $a^*(\infty)$ konvergen ke a. Hubungan antara E^2 dengan a^* yang merupakan fungsi perubah bebas akan mempunyai kelerengan $\partial E^2/\partial a^*$. Kelerengan ini sedemikian rupa sehingga untuk t yang cukup lama menyebabkan pemerkira $a^*(t)$ akan konvergen ke a. Namun keberhasilan ini tergantung pada bentuk f(x). Walaupun tidak ada bukti analitis, bilamana a tidak merupakan bilangan konstan tetapi merupakan perubah yang gayut dengan waktu, $a^*(t)$ masih dapat mengikuti perubahan a, asal perubahan a tidak terlalu cepat (Doebelin, 1986).

Model Matematika Penentuan Parameter Bahan Makanan

Lima macam model matematika akan dibahas dalam penelitian ini yaitu model linier dengan satu parameter, model linier dengan dua parameter, model tak linier dengan dua parameter, model tak linier dengan eksponensial dan model tak linier dengan tiga parameter.

1. Model Linier dengan Satu Parameter

Model matematika dengan satu parameter dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$z = ax(t) \qquad (5)$$

Model ini dapat dijumpai seperti misalnya hubungan antara tegangan geser dengan laju geser untuk mengukur viscositas cairan Newtonian dan hubungan antara tegangan dengan regangan untuk mengukur elastisitas bahan (Mohsenin, 1970).

Dengan menggunakan $a^*(t)$ sebagai pemerkira a, maka kesalahan estimasi akan berupa:

$$E(t) = (a^* - a)x \qquad (6)$$

Laju perubahan pemerkira sesuai dengan persamaan (3) akan berupa:

$$\frac{da^*}{dt} = -2G(a^* - a)x^2 \qquad (7)$$

Integrasi persamaan (7) akan didapatkan pemerkira parameter yang berupa sebagai berikut:

$$a^*(t) = (a_0^* - a)\, e^{-2G \int_0^t x(\tau) d\tau} + a \qquad (8)$$

Persamaan (8) menunjukkan bahwa setelah selang waktu yang cukup bilangan eksponensial akan menjadi nol sehingga demikian a*(t) akan konvergen ke a.

2. Model Linier dengan Dua Parameter

Model matematika linier dengan dua parameter dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$z = ax(t) + by(t) \qquad (9)$$

Model tersebut dapat dijumpai dalam beberapa bentuk. Bilamana y berupa konstan maka model ini akan merupakan model bahan cairan pseudoplastis. Sedangkan bilamana y = dx/dt model ini berupa model linier bahan viscoelastis atau model Kelvin (Mohsenin, 1970).

Dengan menggunakan a*(t) dan b*(t) masing-masing sebagai pemerkira parameter a dan b, kesalahan perkiraan keluaran E(t) akan berupa:

$$E(t) = (a^* - a)x + (b^* - b)y \qquad (10)$$

Dengan menggunakan urutan kerja seperti halnya persamaan (7) laju perubahan pemerkira untuk masing-masing a* dan b* akan didapatkan:

$$\frac{da^*(t)}{dt} = -2G[a^* - a]x^2 - 2G[b^* - b)xy \qquad (11)$$

dan

$$\frac{db^*(t)}{dt} = -2G[b^* - b]\,y^2 - 2G[a^* - a)xy \qquad (12)$$

Dengan menggunakan urutan penyelesaian problem persamaan diferential (Etgen dan Morris, 1977) didapatkan pemecahan persamaan (11) untuk parameter pertama sebagai berikut:

$$a^*(t) = a + e^{-2G\int_0^t x^2(\tau)\,d\tau}\left[(a_0^* - a) - 2G\int_0^t (b^*(\sigma) - b)x(\sigma)y(\sigma)e^{2G\int_0^\sigma x^2(\tau)\,d\tau}\,d\sigma\right] \qquad (13)$$

Demikian juga dari persamaan (12) didapatkan penyelesaian untuk parameter kedua sebagai berikut:

$$b^*(t) = b + e^{-2G\int_0^t y^2(\tau)\,d\tau}\left[(b_0^* - b) - 2G\int_0^t (a^*(\sigma) - a)x(\sigma)y(\sigma)e^{2G\int_0^\sigma y^2(\tau)\,d\tau}\,d\sigma\right] \qquad (14)$$

Dari persamaan (13) dan (14) terlihat bahwa kedua pemerkira untuk konvergen menuju ke masing-masing nilai parameter yang sebenarnya saling berkaitan satu sama lain. Pemerkira a*(t) akan konvergen ke a bilamana b*(t) juga kovergen ke b, dan sebaliknya. Penyelesaian yang pasti tergantung dari fungsi sinyal masukan dan keluaran. Namun dari eksponen pada kedua persamaan dapat dilihat bahwa kedua pemerkira cenderung akan konvergen menuju ke nilai kedua parameter yang sebenarnya.

3. Model Tak-linier dengan Dua Parameter

Model tak linier dengan dua parameter dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$z = ax(t)^n \qquad (15)$$

Model ini dapat dijumpai pada model hubungan tegangan geser dengan laju geser untuk bahan cairan tak Newtonian atau lazim disebut *power law*. Penyelesaian model tersebut secara langsung sangat kompleks dan tidak didapatkan hasil yang menunjukkan bahwa pemerkira akan konvergen ke nilai parameter yang sebenarnya. Dengan mengambil logaritma kedua belah sisi persamaan (15) seperti diperlihatkan dibawah ini:

$$\log(z) = \log(a) + n\log(x) \tag{16}$$

Persamaan (16) menyerupai model linier dengan dua parameter seperti yang diperlihatkan dalam persamaan (9). Dengan mengoperasikan fungsi logaritma pada kedua perubah maka kedua pemerkira parameter dalam selang waktu yang cukup akan konvergen ke masing-masing parameter yang sebenarnya.

4. Model Tak Linier dengan Eskponensial

Model eksponensial dapat diperlihatkan sebagai berikut:

$$z = a\,e^{nx(t)} \tag{17}$$

Model ini dijumpai pada pengukuran hambatan thermis bakteri atau enzym dalam pengolahan thermis bahan makanan, dalam metode pengukuran difusitas panas bahan atau pemerkiraan waktu pemanasan titik terdingin bahan dalam kaleng (Bhowmik dan Hayakawa, 1979). Seperti halnya model tak linier dengan dua parameter, penyelesaian secara analitis untuk menguji apakah pemerkira parameter akan konvergen ke nilai sebenarnya adalah sangat rumit. Dengan mengoperasikan logaritma ke kedua sisi persamaan akan didapatkan hubungan seperti berikut:

$$\log(z) = \log(a) + n\log(e)\,x \tag{18}$$

Persamaan (18) serupa dengan model linier dengan dua parameter seperti yang ditunjukkan dengan persamaan (9). Dengan mengoperasikan fungsi logaritma pada keluaran atau perubah gayut, kedua pemerkira parameter akan konvergen ke masing-masing nilai parameter sebenarnya dengan bertambahnya waktu.

5. Model Tak Linier dengan Tiga Parameter

Model ini merupakan penjumlahan model 1 dan model 3 yang dapat ditunjukkan sebagai persamaan berikut:

$$z = ay(t) + b\,x(t)^n \tag{19}$$

Model ini dijumpai dalam model gaya tumbukan benda berbentuk bola dengan y = x dx/dt yang dapat digunakan untuk memberi kriteria keranuman buah (Lichtensteiger, 1982).

Dengan menggunakan urutan kerja seperti persamaan (7), laju ketiga pemerkira didapatkan sebagai berikut:

$$\frac{da^*(t)}{dt} = -2G[a^* - a]\,y^2 - 2G\,[b^* x^{n^*} - bx^n]\,y \tag{20}$$

dan

$$\frac{db^*(t)}{dt} = -2G[a^* - a]\,yx^{n^*} - 2G[b^* x^{n^*} - bx^n]x^{n^*} \tag{21}$$

serta

$$\frac{dn^*(t)}{dt} = -2G[(a^* - a)y - (b^* x^{n^*} - bx^n)]\ln(x)b^* x^{n^*} \tag{22}$$

Penyelesaian analitis untuk pemerkira $a^*(t)$ dan $b^*(t)$ menunjukkan bahwa kedua pemerkira tersebut akan konvergen ke masing-masing parameter sebenarnya asalkan pemerkira $n^*(t)$ juga konvergen ke n. Namun penyelesaian analitis $n^*(t)$ adalah sangat rumit sehingga tidak didapatkan indikasi apakah pemerkira ini akan konvergen ke n.

Bilamana kedua pengubah bebas tidak saling gayut satu sama lain, dengan mengatur sinyal kedua masukan sehingga salah satu menjadi nol, ketiga parameter dapat dicari secara bertahap seperti halnya model 1 dan model 3. Namun bila kedua pengubahnya saling gayut seperti sebagai berikut:

$$f = ax(t)\,\frac{dx(t)}{dt} + b\,x(t)^n \qquad (23)$$

ketiga parameter dapat diperkirakan secara bertahap bila tersedia sinyal x(t) sedemikian sehingga terjadi saat dx/dt = 0. Sinyal semacam ini dapat berupa sinyal sinusoidal atau impact yang laju simpangannya menjadi nol pada saat simpangan mencapai maximal.

Pembahasan

Empat model yang pertama secara matematis menunjukkan bahwa dalam selang waktu tertentu pemerkira parameter akan konvergen ke nilai parameter sebenarnya. Laju pemerkiraan tergantung pada nilai bilangan konstan G. Doebelin (1986) mengemukakan bahwa dengan bertambah besar bilangan konstan G akan mempercepat laju konvergensi pemerkira parameter. Namun dalam beberapa kasus dengan nilai G yang besar justru menyebabkan pemerkira parameter akan bergoyang tidak akan konvergen. Untuk itu disarankan untuk dicoba dengan beberapa bilangan konstan G atau dengan menggunakan bilangan konstan G yang berbeda untuk masing-masing pemerkira.

Laju pemerkiraan juga dipengaruhi oleh perubah bebasnya. Seperti ditunjukkan oleh persamaan (8), (13) dan (14), makin besar perubah bebasnya akan makin cepat laju konvergensi pemerkiranya. Sebaliknya bila perubah bebasnya nol berarti laju estimasi menjadi nol, atau dengan kata lain pemerkira parameter perubah tersebut sedang tidak dijejaki. Demikian juga bila kesalahan pemerkiraan menjadi nol, tidak akan ada perubahan nilai pemerkira. Untuk model matematika dengan dua parameter ini tidak berarti bahwa bila kesalahan pemerkiraan menjadi nol lalu kedua parameternya sudah konvergen. Dari ketergayutan perubah dengan waktu, atau dengan bergantinya nilai perubah selama parameternya belum sesuai dengan parameter yang sebenarnya masih akan terjadi kesalahan pemerkiraan. Parameter sudah mencapai nilai yang sebenarnya bilamana parameter itu berlaku untuk berbagai nilai perubah. Dari hal ini nampak bahwa apabila pemilihan model matematika untuk suatu sistem tidak tepat akan menyebabkan tidak terjadi konvergensi pemerkira menjadi parameter yang benar. Pemerkira parameter akan bergoyang setelah selang waktu tertentu.

Penyelesaian secara analitis untuk model kelima tidak ada hasil yang dapat digunakan sebagai petunjuk apakah pemerkira akan konvergen ke parameter yang sebenarnya. Cara lain untuk mengetahui hal tersebut adalah dengan melakukan simulasi. Mungkin dengan metode ini akan didapatkan indikasi konvergensi pemerkira parameter. Apabila model ini dapat disederhanakan dengan menggunakan pangkat yang konstan, model ini akan menjadi model linier dengan dua parameter. Studi lebih lanjut untuk model ini masih diperlukan.

Kesimpulan

Parameter untuk model matematika linier dengan satu parameter, model linier dengan dua parameter, model tak linier dengan dua parameter dan model tak linier dengan eksponensial dapat diperkirakan dengan menggunakan metode penjejak parameter. Sedangkan untuk model tak linier dengan tiga parameter, tidak ada penyelesaian analitis yang menjadi petunjuk apakah pemerkira ketiga parameter akan konvergen kepada tiga nilai parameter sebenarnya.

Daftar Simbul

a	:	parameter
a^*	:	pemerkira parameter a.
a_0^*	:	nilai awal pemerkira a^*.
b	:	parameter.
b^*	:	pemerkira parameter b.
b_0^*	:	nilai awal pemerkira b^*
c	:	bilangan konstan
E	:	kesalahan estimasi.
f	:	gaya.
G	:	bilangan konstan positip.
n	:	parameter.
n^*	:	pemerkira parameter n.
t	:	waktu
x	:	perubah bebas, defleksi atau deformasi
dx/dt	:	laju simpangan atau laju deformasi.
y	:	perubah bebas.
z	:	perubah gayut.
σ	:	perubah dumi untuk waktu
τ	:	perubah dumi untuk waktu.

Daftar Pustaka

Bhowmik, Santi R. dan Hayakawa, Kan-ichi. 1979. A New Method for Determining the Apparent Thermal Diffusity of Thermally Conductive Food. J. of Food Sci. (44):2, pp. 469 — 474.

Doebelin, Ernest O. 1980. System Modeling and Response. Theoritical and Experimental Approaches. John Wiley & Sons. New York.

Etgen, Garret J. dan Morris, William L. 1977. An Introduction to Ordinary Differential Equations. Harper & Row, Publishers. New York.

Lichtensteiger, M. J. 1982. Impact and Analysis of Viscoelastic Spheres, Fruits and Vegetables with Rigid, Plane Surfaces. Ph.D. dissertation. The Ohio State University.

Mohsenin, Nuri N. 1970. Physical Properties of Plant and Animal Materials. Vol. 1. Gordon and Breach Science Publishers. New York.

Peleg, Micha dan Bagley, Edward B. 1983. Physical Properties of Foods. AVI Publishing Company, Inc. Westport.

Rao, M. A. dan Rizvi, S. S. H. 1986. Engineering Properties of Foods. Marcel Dekker, Inc. New York.