Teorema Cayley-Hamilton pada Matriks atas Ring Komutatif

Joko Harianto[1], Nana Fitria[2], Puguh Wahyu Prasetyo[3], Vika Yugi Kurniawan[4]

Jurusan Matematika, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta Indonesia
[1]hariantojoko63@yahoo.com,[2]candy_fans@yahoo.com,[3]puguhwp@gmail.com,
[4]kakayugi@gmail.com

Intisari

Dalam artikel ini akan dikemukakan Teorema Cayley Hamilton pada matriks atas ring komutatif R sebagai perluasan dari matriks atas lapangan F yang telah dikenal pada Aljabar Linear. Pembahasan Teorema Cayley Hamilton akan terkait dengan suatu polinomial karakteristik dari matriks yang diberikan. Tentu saja, pendefinisian polinomial karakteristik dari matriks atas R tidak berbeda dengan pendefinisian polinomial karakteristik dari matriks atas F yang telah dikenal pada Aljabar Linear. Dalam Aljabar Linear, Teorema Cayley Hamilton mengatakan bahwa $\boldsymbol{C_A(A) = \mathbf{O}}$. Ternyata, Teorema Cayley Hamilton masih tetap berlaku pada matriks atas ring komutatif *R*.

Jika diberikan ring komutatif R maka dapat dibentuk ring komutatif $\boldsymbol{R[X]}$ yaitu himpunan polinomial-polinomial atas *R.* Selain itu, dapat dibentuk juga ring $\boldsymbol{M_{n\times n}(R[X])}$ yaitu himpunan matriks yang semua entrinya merupakan polinomial atas R. Selanjutnya, jika diberikan $\boldsymbol{(M_{n\times n}(R))[X]}$ yaitu himpunan polinomial–polinomial dengan koefisiennya berupa matriks atas R, maka dapat dibentuk suatu pemetaan $\boldsymbol{\psi}$: $\boldsymbol{M_{n\times n}(R[X]) \to (M_{n\times n}(R))[X]}$, sehingga diperoleh $\boldsymbol{M_{n\times n}(R[X]) \cong (M_{n\times n}(R))[X]}$. Adanya isomorfisma melalui pemetaan $\boldsymbol{\psi}$ sangat berguna untuk menunjukkan Teorema Cayley Hamilton pada matriks atas R. Salah satu aplikasi Teorema Cayley Hamilton yaitu invers dari suatu matriks A atas ring R merupakan suatu bentuk polinomial atas R dalam *A.* Lebih lanjut sebagai akibat dari Teorema Cayley Hamilton diperoleh bahwa radikal dan prima minimal dari ideal null A sama dengan radikal dan prima minimal dari ideal yang dibangun oleh polinomial karakteristik dari matriks *A.*

Kata kunci: Cayley Hamilton, Polinomial karakteristik.

Abstract

This paper will explain the Cayley-Hamilton theorem on matrices over a commutative ring *R* as an generalization of the matrix over a field *F* which has been known in Linear Algebra. Discussing Cayley-Hamilton theorem would be associated with a characteristic polynomial of a given matrix. Of course, defining characteristic polynomial of matrix over *R* is no different with the defining characteristic polynomials of matrices over *F* which has been known on Linear Algebra. In Linear Algebra, Cayley Hamilton theorem says that $\boldsymbol{C_A(A) = \mathbf{O}}$. Apparently, Cayley-Hamilton theorem can be applied to matrices over a commutative ring *R*.

If given a commutative ring *R* can be formed commutative ring *R* [X] that the definition is the set of polynomials over *R*. In addition, the ring also can be formed $\boldsymbol{M_{n\times n}(R[X])}$ that the definition is the set of all matrices whose entries are polynomials over *R*. Furthermore, if given $\boldsymbol{(M_{n\times n}(R))[X]}$ is the set of polynomials with coefficients in the form of a matrix over *R*, then it may be formed of a mapping $\boldsymbol{\psi}$: $\boldsymbol{M_{n\times n}(R[X]) \to (M_{n\times n}(R))[X]}$ such that $\boldsymbol{M_{n\times n}(R[X]) \cong (M_{n\times n}(R))[X]}$. The existence of the isomorphism by mapping ψ is very useful to show the Cayley Hamilton theorem on matrices over *R*. One application of the Cayley Hamilton theorem which is the inverse of a matrix A the ring R is a form of polynomials over R in A. Further as a result of the Cayley-Hamilton theorem is obtained that the radical and minimal prime ideal of A is equal to null and prime radical of the ideal minimum established by the characteristic polynomial of matrix A.

Keywords: Cayley-Hamilton theorem, characteristic polynomial.

1. Landasan Teori

Pada bagian ini akan dibahas tentang radikal dan prima minimal dari sebuah ideal dalam suatu ring komutatif R. Bagian ini digunakan untuk membahas pada bagian selanjutnya, yaitu hubungan antara polinomial karakteristik dari suatu matriks yang didefinisikan atas suatu ring komutatif dengan order dari idealnya.

Apabila diberikan suatu ring komutatif R, Sebuah ideal $\mathfrak{B}$ dari R disebut ideal prima jika $\mathfrak{B} \neq R$ dan apabila $xy \in \mathfrak{B}$ maka $x \in \mathfrak{B}$ atau $y \in \mathfrak{B}$. Selanjutnya apabila diperhatikan terdapat hubungan antara ideal prima dari R dengan subset-subset dari R yang tertutup terhadap operasi perkalian. Definisi dari subset dari R yang tertutup terhadap operasi perkalian yaitu suatu himpunan bagian $S \subseteq R$ dikatakan tertutup terhadap perkalian jika $1 \in S$ dan $xy \in S$ apabila $x, y \in S$. Setelah dijelaskan tentang ideal prima dan subset dari R yang tertutup terhadap operasi perkalian, berikut akan diberikan definisi dari radikal suatu ideal.

Selanjutnya perhatikan jika diberikan I ideal dari R, apabila $x \in R$, maka terdapat dua kemungkinan untuk x^2, yaitu $x^2 \notin I$ atau $x^2 \in I$. Perhatikan $x^2 \in I$, maka selanjutnya apakah $x^3 \in I$ atau $x^3 \notin I$. Secara analog dengan langkah ini diperoleh $x^n \in I$ atau $x^n \notin I$. Sehingga dapat dibentuk himpunan semua $x \in R$ dengan sifat $x^n \in I$, untuk suatu $n \geq 1$. Dari sini muncul definisi radikal dari suatu ideal.

Definisi 1.1

Diberikan $\mathfrak{A}$ ideal dari R. Radical dari $\mathfrak{A}$, yang dituliskan dengan $\sqrt{\mathfrak{A}}$, adalah himpunan

$\sqrt{\mathfrak{A}} = \{x \in R | x^n \in \mathfrak{A} \text{ untuk suatu } n \geq 1\}$.

Contoh 1.2

Perhatikan bahwa Z merupakan ring dengan operasi penjumlahan dan perkalian. $4Z$ merupakan ideal dari Z. Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa $\sqrt{4Z} = 2Z$. Kemudian perhatikan bahwa (0) merupakan ideal yang dibangun oleh 0. Selanjutnya diperoleh $\sqrt{(0)} = (0)$.

Teorema 1.3

Diberikan ring R. Jika $\mathfrak{A}$ merupakan ideal dari R, maka $\sqrt{\mathfrak{A}}$ merupakan ideal dari ring R.

Bukti

Ambil sebarang $a, b \in \sqrt{\mathfrak{A}}$. Hal ini berarti terdapat $m, n \geq 1$ sedemikian hingga berlaku $a^m, b^n \in \mathfrak{A}$. Akan ditunjukkan bahwa $a - b \in \sqrt{\mathfrak{A}}$. Hal ini ekuivalen menunjukkan bahwa terdapat k sedemikian hingga berlaku $(a - b)^k \in \mathfrak{A}$.

Katakan $k = m + n$.
Perhatikan bahwa

$$(a-b)^k = (a-b)^{m+n} = \sum_{i=0}^{m+n} (-1)^i \, a^{m+n-i} b^i.$$

Apabila diperhatikan lebih lanjut $a^{m+n-i}b^i = a^m a^{n-i} b^i$. Karena $a^m \in \mathfrak{A}$, maka $a^m a^{n-i} b^i \in \mathfrak{A}$ untuk $i = 0,1,\dots,m+n$. Hal ini berakibat $\sum_{i=0}^{m+n}(-1)^i \, a^{m+n-i} b^i = (a-b)^{m+n} = (a-b)^k \in \mathfrak{A}$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $a-b \in \sqrt{\mathfrak{A}}$.

Kemudian ambil sebarang $b \in \sqrt{\mathfrak{A}}$. Hal ini berarti terdapat $n \geq 1$ sedemikian hingga berlaku $b^n \in \mathfrak{A}$. Ambil sebarang $r \in R$, akan ditunjukkan bahwa $rb \in \sqrt{\mathfrak{A}}$ dan $br \in \sqrt{\mathfrak{A}}$. Hal ini ekuivalen menunjukkan $(rb)^l \in \mathfrak{A}$ untuk suatu l. Pilih $l = n$, sehingga berlaku

$$(rb)^l = (rb)^n = r^n b^n$$

Perhatikan bahwa $r \in R \Rightarrow r^n \in R$ dan telah diketahui bahwa $b^n \in \mathfrak{A}$. Sedangkan $\mathfrak{A}$ merupakan suatu ideal, hal ini berakibat $r^n b^n = (rb)^l \in \mathfrak{A}$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $rb \in \sqrt{\mathfrak{A}}$. Secara analog dapat ditunjukkan bahwa $br \in \sqrt{\mathfrak{A}}$.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\sqrt{\mathfrak{A}}$ merupakan ideal dari ring R. ■

Teorema 1.4

Diberikan *R* suatu ring. Jika $\mathfrak{A}$ merupakan ideal dari *R*, maka $\mathfrak{A} \subseteq \sqrt{\mathfrak{A}}$.

Bukti

Akan ditunjukkan bahwa $\mathfrak{A} \subseteq \sqrt{\mathfrak{A}}$. Ambil sebarang $x \in \mathfrak{A}$. Perhatikan bahwa $x = x^1$. Jadi terdapat $n = 1$, sedemikian hingga $x^1 \in \mathfrak{A}$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $x \in \sqrt{\mathfrak{A}}$. Dengan demikian $\mathfrak{A} \subseteq \sqrt{\mathfrak{A}}$. ■

Setelah dibahas tentang radikal suatu ideal beserta contohnya, berikut akan dijelaskan definisi dari prima minimal. Misalkan $\mathfrak{A}$ ideal dari R. Selanjutnya dibentuk himpunan semua ideal prima yang memuat $\mathfrak{A}$. Tentu saja himpunan ini bersifat tidak tunggal. Lalu dari sini ada sifat dari himpunan tersebut yang bersifat minimal, sehingga hal ini memotivasi munculnya definisi dari prima minimal suatu ideal.

Definisi 1.5

Diberikan A merupakan ideal sejati dari *R*. Sebuah ideal prima dari *R* yang memuat A dan minimal yang bersesuaian dengan $V(\mathrm{A})$ disebut dengan prima minimal dari A. Dengan $V(\mathrm{A})$ merupakan himpunan semua ideal prima yang memuat A.

Dengan demikian, sebuah ideal $\mathfrak{B}$ merupakan prima minimal dari $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A} \neq R$), jika $\mathfrak{B}$ ideal prima, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, dan sedemikian hingga tidak ada ideal prima $\mathfrak{B}'$ dari *R* dengan $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}' < B$. Kita akan menunjukkan bahwa setiap ideal yang berbeda dari *R* mempunyai paling sedikit saru prima minimal. Sekarang amati bahwa jika $\mathfrak{A}$ merupakan ideal prima dari R, maka $\mathfrak{A}$ merupakan satu-satunya prima minimal dari $\mathfrak{A}$. Berikut akan diberikan suatu contoh untuk memperjelas.

Contoh 1.6

Perhatikan bahwa Z merupakan ring dengan operasi penjumlahan dan perkalian bilangan bulat. Apabila diperhatikan lebih lanjut Z merupakan daerah faktorisasi tunggal. Kemudian dibentuk $20Z$ merupakan ideal dari Z. Faktorisasi $20 = 2^2.5$, dengan demikian ideal prima yang memuat $20Z$ adalah $2Z$ dan $5Z$. Sehingga dari sini dapat dibentuk himpunan lengkap prima-prima minimal dari $20Z$ yaitu $\{2Z, 5Z\}$.

Setelah diberikan definisi dan contoh dari prima minimal suatu ideal, berikut akan diberikan suatu teorema yang menghubungkan prima minimal dari suatu ideal dengan subset tertutup dengan perkalian yang salin asing dengan ideal tersebut.

Teorema 1.7

Misalkan A merupakan ideal sejati dari *R*. Sebuah ideal B merupakan prima minimal dari A jika dan hanya jika B^c maksimal, subset tertutup dengan perkalian dari *R* yang saling asing dengan A .

Bukti:

Misalkan $\mathfrak{B}^c$ maksimal, subset dari *R* yang tertutup terhadap operasi perkalian yang saling asing dengan $\mathfrak{A}$. Karena $\mathfrak{B}^c$ merupakan subset yang tertutup terhadap operasi perkalian, $\mathfrak{B}$ merupakan ideal prima dari *R*. Karena $\mathfrak{B}^c \cap \mathfrak{A} = \emptyset,\ \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Misalkan $\mathfrak{D}$ ideal prima dari *R* sedemikian hingga $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{B}$. Selanjutnya $\mathfrak{B}^c \subseteq \mathfrak{D}^c$, dan $\mathfrak{D}^c$ merupakan subset tertutup terhadap perkalian dari *R* yang saling asing dengan $\mathfrak{A}$. Dengan sifat kemaksimalan dari $\mathfrak{B}^c$, kita dapat menarik kesimpulan bahwa $\mathfrak{B}^c = \mathfrak{D}^c$, oleh sebab itu $\mathfrak{B} = \mathfrak{D}$, dan $\mathfrak{B}$ prima minimal dari $\mathfrak{A}$.

Sebaliknya, misalkan $\mathfrak{B}$ merupakan prima minimal dari $\mathfrak{A}$. Selanjutnya $\mathfrak{B}^c$ merupakan subset tertutup terhadap operasi perkalian dari *R* yang saling asing dengan $\mathfrak{A}$. Dari [Brown, 6.10] diperoleh $\mathfrak{B}^c \subseteq T$ dengan T maksimal, yang merupakan merupakan subset tertutup terhadap operasi perkalian dari *R* yang saling asing dengan $\mathfrak{A}$. Selanjutnya perhatikan bahwa terdapat ideal prima $\mathfrak{D}$ sedemikian hingga $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{D}$, dan $\mathfrak{D} \cap T = \emptyset$. Khususnya, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{B}$. Karena $\mathfrak{B}$ merupakan prima minimal dari $\mathfrak{A}, \mathfrak{D} = \mathfrak{B}$. Akan tetapi $\mathfrak{B}^c = T$, dan $\mathfrak{B}^c$ maksimal, yang merupakan merupakan subset tertutup terhadap operasi perkalian dari *R* yang saling asing dengan $\mathfrak{A}$. ■

Dari teorema diatas apabila diperhatikan lebih lanjut. apabila diberikan suatu ideal dari *R*, katakan $\mathfrak{A}$. berakibat sebarang ideal prima dari *R* yang memuat $\mathfrak{A}$ memuat sebuah prima minimal dari $\mathfrak{A}$. Untuk lebih jelasnya perhatikan Akibat 1.6 berikut ini.

Akibat 1.8

Misalkan $\mathfrak{A}$ merupakan ideal sejati dari *R*. Sebarang ideal prima dari *R* yang memuat $\mathfrak{A}$ memuat sebuah prima minimal dari $\mathfrak{A}$.

Bukti

Misalkan $\mathfrak{D}$ merupakan ideal prima dari *R* dengan sifat $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{D}$. Perhatikan bahwa $\mathfrak{D}^c$ merupakan subset dari *R* yang tertutup dengan operasi perkalian yang saling asing dengan $\mathfrak{A}$. Dari [Brown, 6.10], $\mathfrak{D}^c$ termuat didalam $T \subseteq R$, dengan T tertutup dengan operasi perkalian yang bersifat maksimal dan saling asing dengan $\mathfrak{A}$. [Brown 6.3] mengimplikasikan bahwa terdapat ideal prima $\mathfrak{B}$ sedemikian hingga $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, dan $\mathfrak{B} \cap T = \emptyset$. Akan tetapi perhatikan bahwa $T \subseteq \mathfrak{B}^c$, dan dengan sifat kemaksimalan dari *T*, mengakibatkan $\mathfrak{D}^c \subseteq T = \mathfrak{B}^c, \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{D}$. ■

2. Pembahasan

Dalam pembahasan ini, akan dikemukakan Teorema Cayley-Hamilton pada matriks atas ring komutatif *R*. Selanjutnya, akan dibahas juga beberapa aplikasi dan akibat dari Teorema Cayley-Hamilton terkait dengan radikal dan prima minimal suatu ideal dari suatu matriks atas ring komutatif *R*. Sebelum membahas Teorema Cayley-Hamilton pada matriks atas ring komutatif *R*, terlebih dahulu akan diberikan beberapa definisi dan teorema yang terkait dengan Teorema Cayley Hamilton.

Misalkan T merupakan suatu ring dan T tidak harus ring komutatif, didefinisikan polinomial ring dengan X *indeterminate* atas T sebagai berikut:

$$T[X] = \{a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n | a_i \in T, dan\ n \geq 0\}$$

dengan $\partial(f) = n$ menotasikan pangkat dari suatu polinomial $T[X]$.

Berikut ini merupakan teorema pembagian dalam suatu polinomial atas ring tak komutatif.

Teorema 2.1

Jika $f(X) = a_0X^n + \cdots + a_n \in T[X]$ dan $g(X) = b_0X^n + \cdots + b_m \in T[X]$, $b_0 \in U(T)$ dengan $U(T)$ merupakan himpunan semua unit di T, maka terdapat dengan tunggal $u(X), v(X), r(X), s(X) \in T[X]$ sedemikian sehingga:

a. $f(X) = u(X)g(X) + r(X)$, dengan $r(X) = 0$ atau $\partial(r) < \partial(g)$.
b. $f(X) = g(X)v(X) + s(X)$, dengan $s(X) = 0$ atau $\partial(s) < \partial(g)$.

Dari Teorema 2.1, karena T ring tak komutatif sehingga polinomial $r(X)$ tidak harus sama dengan polinomial $s(X)$. Didefinisikan polinomial $r(X)$ dan $s(X)$ sebagai berikut.

Definisi 2.2

Misalkan $f(X), g(X) \in T[X]$ dan $g(X) \neq 0$,

a. $r(X)$ dikatakan sisa kanan dari pembagian $f(X)$ oleh $g(X)$ jika $f(X) = u(X)g(x) + r(X)$, dengan $r = 0$ atau $\partial(r) < \partial(g)$.
b. $s(X)$ dikatakan sisa kiri dari pembagian $f(X)$ oleh $g(X)$ jika $f(X) = g(X)v(X) + s(X)$, dengan $s = 0$ atau $\partial(s) < \partial(g)$.

Perlu diperhatikan bahwa jika T merupakan suatu ring tak komutatif dan $f(X) \in T[X]$, maka untuk suatu $z \in T$, $f(z) \in T$ dapat memiliki dua kemungkinan arti yang berbeda, yaitu $f(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$ dan $f(z) = z^na_0 + z^{n-1}a_1 + \cdots + za_{n-1} + a_n$. Oleh karena itu, agar $f(z) \in T$ tidak memberikan arti yang ambigu maka diberikan definisi berikut.

Definisi 2.3

Misalkan $f(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n \in T(X)$ dan $z \in T$.

(a) $f_R(z) \in T$ dikatakan evaluasi kanan dari $f(z)$ pada z, jika

$$f_R(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n.$$

(b) $f_L(z) \in T$ dikatakan evaluasi kiri dari $f(z)$ pada z, jika

$$f_L(z) = z^na_0 + z^{n-1}a_1 + \cdots + za_{n-1} + a_n.$$

Jika T ring tak komutatif, maka $f_R(z) \neq f_L(z)$. Namun, jika T ring komutatif maka $f_R(z) = f_L(z)$.

Dalam teorema berikut, diberikan sifat dari $f_R(z)$ dan $f_L(z)$ dalam suatu polinomial atas ring tak komutatif.

Teorema 2.4
Jika $f(X) \in T(X)$ dan $z \in T$, maka terdapat $u(X), v(X) \in T(X)$ sedemikian sehingga:
(a) $f(X) = u(X)(X - z) + f_R(z)$.
(b) $f(X) = (X - z)v(X) + f_L(z)$.

Dalam teorema ini, $f_R(z)$ merupakan sisa kanan dari pembagian $f(X)$ oleh $X - z$ dan $f_L(z)$ merupakan sisa kiri dari pembagian $f(X)$ oleh $X - z$. Dari Teorema 2.4, diperoleh akibat yang merupakan syarat perlu dan cukup suatu polinomial atas ring tak komutatif dikatakan pembagi kanan dan kiri, sebagai berikut:

Akibat 2.5
$X - z$ merupakan pembagi kanan dari $f(X) \in T[X]$ jika dan hanya jika $f_R(z) = 0$. Selanjutnya, $X - z$ merupakan pembagi kiri pada $f(X) \in T(X)$ jika dan hanya jika $f_L(z) = 0$. Jika diketahui ring komutatif R, maka dapat dibentuk suatu ring komutatif $R[X]$ dan dapat juga dibentuk suatu ring $M_{n\times n}(R[X])$. Misalkan diambil $A \in M_{2\times 2}(Z[X])$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} 2x^2 + 3x + 1 & 6x - 5 \\ 2 & x^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Perhatikan bahwa matriks A dapat dituliskan menjadi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Secara umum, setiap matriks $A \in M_{n\times n}(R)$ dapat dituliskan dalam bentuk

$$A = A_0X^p + A_1X^{p-1} + \cdots + A_{p-1}X + A_p$$

dengan $A_0, A_1, \cdots, A_p \in M_{n\times n}(R)$ dan $p = maks\{\partial([A]_{ij}) \big| [A]_{ij} \neq 0, 1 \leq i, j \leq n\}$.
Dengan demikian, dapat dibentuk suatu pemetaan

$$\psi: M_{n\times n}(R[X]) \to (M_{n\times n}(R))[X],$$

dengan

$$\psi(A) = \sum_{j=0}^{p} A_j X^{p-j}.$$

Berikut ini diberikan lemma yang menyatakan hubungan antara ring $M_{n\times n}(R[X])$ dengan ring $(M_{n\times n}(R))[X]$ melalui pemetaan ψ.

Lemma (2.6)
Ring $M_{n\times n}(R[X])$ isomorfis dengan ring $(M_{n\times n}(R))[X]$ melalui pemetaan

$$\psi(A) = \sum_{j=0}^{p} A_j X^{p-j}.$$

Adanya isomorfisma antara ring $M_{n\times n}(R[X])$ dengan ring $(M_{n\times n}(R))[X]$ sangat bermanfaat untuk menjelaskan Teorema Cayley Hamilton pada matriks atas ring. Untuk membahas Teorema Cayley Hamilton tentu saja terkait dengan suatu polinomial karakteristik dari matriks atas ring yang diberikan. Berikut ini akan diberikan definisi polinomial karaktristik dari suatu matriks atas ring.

Definisi (2.7)
Misalkan $A \in M_{n\times n}(R)$. Polinomial karakteristik dari A dinotasikan $C_A(X)$, didefinisikan sebagai

$$C_A(X) = det(XI_n - A)$$

Dari definisi (2.7), dengan menggunakan ekspansi Laplace diperoleh $det(XI_n - A)$ merupakan suatu polinomial berpangkat n di $R[X]$ dalam bentuk berikut:

$$C_A(X) = X^n + a_1X^{n-1} \cdots + a_{n-1}X + a_n.$$

dengan $a_1 = -\sum_{j=1}^{n}[A]_{jj} = -Tr(A)$ dan $a_n = (-1)^n det(A)$.

Dalam Aljabar Linear, Teorema Cayley Hamilton mengatakan bahwa $C_A(A) = \mathbf{O}$ dengan A adalah matriks yang semua entri-entrinya merupakan anggota dari lapangan *F*. Ternyata untuk $F = R$, Teorema Cayley Hamilton masih tetap berlaku. Berikut Teorema Cayley Hamilton pada matriks atas ring.

Teorema 2.8 (Cayley-Hamilton)
Jika diketahui $A \in M_{n\times n}(R)$, maka $C_A(A) = \mathbf{O}$.

Bukti:
Telah diketahui bahwa $C_A(X)$ merupakan polinomial dalam bentuk

$$C_A(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n \in R[X].$$

Selanjutnya, dari definisi (2.7) diperoleh

$$C_A(X) = det(XI_n - A)$$
$$\Leftrightarrow C_A(X)I_n = adj(XI_n - A)(XI_n - A) \in M_{n\times n}(R[X])$$
$$\Leftrightarrow \psi[C_A(X)I_n] = \psi[adj(XI_n - A)(XI_n - A)]$$
$$\Leftrightarrow I_nX^n + a_1I_nX^{n-1} + \cdots + a_nI_n = U(X)(X_n - A) \text{ dengan } U(X) \in M_{n\times n}(R)[X].$$

Sehingga $X_n - A$ merupakan pembagi kanan pada

$$f(X) = I_nX^n + a_1I_nX^{n-1} + \cdots + a_nI_n \in \left(M_{n\times n}(R)\right)[X]$$

dan menurut Akibat (2.5), maka

$$\mathbf{O} = f_R(A) = I_nA^n + a_1I_nA^{n-1} + \cdots + a_nI_n = C_A(A)I_n$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa

$$C_A(A) = \mathbf{O}. \blacksquare$$

Berikut ini akan disajikan aplikasi dari Teorema Cayley Hamilton yang terkait dengan invers suatu matriks atas ring.

Akibat 2.9
Jika $A \in M_{n\times n}(R)$ invertible, maka $A^{-1} = g(A)$ untuk suatu $g(X) \in R[X]$.

Bukti:
Jika $n = 1$, maka $A = (a)$ dengan $a \in U(R)$. Sehingga dapat diambil $g(X) = a^{-1} \in R[X]$dan diperoleh $g(A) = a^{-1}I_1 = (a^{-1}) = A^{-1}$.

Untuk $n > 1$, telah diketahui bahwa $C_A(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n$ dengan $a_n = (-1)^n det(A)$. Dalam hal ini, a_n merupakan unit di R karena A invertible.

Teorema Cayley Hamilton mengatakan bahwa

$$C_A(A) = \mathbf{O}$$
$$\Leftrightarrow A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_nI_n = \mathbf{O}$$
$$\Leftrightarrow A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A = -a_nI_n$$
$$\Leftrightarrow A[(-a_n{}^{-1})(A^{n-1} + a_1A^{n-2} + \cdots + a_{n-1}I_n)] = I_n, \tag{1}$$

dapat diambil

$$g(X) = -a_n{}^{-1}X^{n-1} - a_n{}^{-1}X^{n-2} + \cdots + (-a_n{}^{-1}a_{n-1}) \in R[X].$$

Sehingga Persamaan (1) menunjukkan bahwa $g(A) = A^{-1}$. ■

Perhatikan bahwa jika diambil sebarang $A \in M_{n\times n}(R)$, maka dapat dibentuk suatu homomorfisma $\vartheta_A: R[X] \to M_{n\times n}(R)$ dengan

$$\vartheta_A(r_0X^m + r_1X^{m-1} + \cdots + r_{m-1}X + r_m) = r_0A^m + r_1A^{m-1} + \cdots + r_{m-1}A + r_mI_n.$$

Jelas bahwa

$$Im(\vartheta_A) = R[A] = \{f(A) | f(X) \in R[X]\} \subseteq M_{n\times n}(R).$$

Selanjutnya, tentu saja akan dapat diselidiki kernel dari ϑ_A pada $R[X]$. Namun, berikut ini akan diberikan dahulu definisi kernel dari ϑ_A pada $R[X]$.

Definisi 2.10

Misalkan $A \in M_{n\times n}(R)$. Kernel dari homomorfisma $\vartheta_A: R[X] \to M_{n\times n}(R)$ dikatakan null ideal A dinotasikan N_A yang didefinisikan sebagai

$$N_A = ker(\vartheta_A) = \{f(X) \in R[X] | f(A) = \boldsymbol{O}\}.$$

Dari definisi (2.10), jelas Teorema Cayley Hamilton mengatakan bahwa $C_A(X) \in N_A$. Perlu diperhatikan bahwa untuk mencari polinomial-polinomial dalam N_A dengan suatu matriks A yang telah diberikan tentu saja tidaklah mudah. Karena itu, berikut ini diberikan teorema terkait dengan $C_A(X)$ yang merupakan syarat perlu dan cukup agar suatu polinomial merupakan ideal null A.

Teorema 2.11

Misalkan $A \in M_{n\times n}(R)$ dan $g(X) \in R[X]$. $g(X) \in N_A$ jika dan hanya jika $g(X)adj(XI_n - A) = KC_A(X)$ untuk suatu $K \in M_{n\times n}(R[X])$.

Bukti:

($\Leftarrow$) Misalkan terdapat matriks $K \in M_{n\times n}(R[X])$ sedemikian sehingga

$$g(X)adj(XI_n - A) = KC_A(X). \tag{2}$$

Selanjutnya, kedua ruas Persamaan (2) dikalikan dengan $(XI_n - A)$, diperoleh

$$g(X)adj(XI_n - A)(XI_n - A) = KC_A(X)(XI_n - A)$$
$$\Leftrightarrow g(X)C_A(X)I_n = KC_A(X)(XI_n - A)$$
$$\Leftrightarrow C_A(X)g(X)I_n = C_A(X)K(XI_n - A)$$
$$\Leftrightarrow g(X)I_n = K(XI_n - A) \quad \in M_{n\times n}(R[X])$$
$$\Leftrightarrow \psi(g(X)I_n) = \psi(K)(X_n - A) \quad \in \big(M_{n\times n}(R)\big)[X]. \tag{3}$$

Misalkan

$$g(X) = b_0X^m + b_1X^{m-1} + \cdots + b_{m-1}X + b_m \in R[X].$$

Sehingga

$$\psi(g(X)I_n) = P(X) = (b_0I_n)X^m + (b_1I_n)X^{m-1} + \cdots + b_mI_n \in \big(M_{n\times n}(R)\big)[X],$$

jelas bahwa $P_R(A) = P_L(A)$ karena b_mI_n merupakan matriks diagonal $\forall m$.

Perhatikan Persamaan (3), menurut Teorema (2.4) dan Akibat (2.5) maka $X_n - A$ merupakan pembagi kanan pada $P(X)$ sehingga

$$P_R(A) = P_L(A) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b_0I_n)A^m + (b_1I_n)A^{m-1} + \cdots + b_mI_n = 0$$

$$\Leftrightarrow b_0A^m + b_1A^{m-1} + \cdots + b_mI_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad g(A) = 0.$$

Jadi $g(X) \in N_A$.

$(\Longrightarrow)$ Diketahui $g(X) \in N_A$, maka $g(A) = 0$ untuk suatu $g(X) \in R[X]$.

Misalkan

$$g(X) = b_0X^m + b_1X^{m-1} + \cdots + b_{m-1}X + b_m \in R[X]$$

Sehingga

$$g(A) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b_0A^m + b_1A^{m-1} + \cdots + b_mI_n = 0$$

$$\Leftrightarrow (b_0I_n)A^m + (b_1I_n)A^{m-1} + \cdots + b_mI_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad P_R(A) = 0$$

dengan

$$P(X) = \psi(g(X)I_n) = (b_0I_n)X^m + (b_1I_n)X^{m-1} + \cdots + b_mI_n \in \big(M_{n\times n}(R)\big)[X]$$

Menurut Teorema (2.4) dan Akibat (2.5), maka $X_n - A$ merupakan pembagi kanan pada $P(X)$ sehingga

$$\psi(g(X)I_n) = K(X)(X_n - A) \text{ untuk suatu } K(X) \in \big(M_{n\times n}(R)\big)[X]$$

$$\Leftrightarrow \quad \psi^{-1}[\psi(g(X)I_n)] = \psi^{-1}[K(X)(X_n - A)]$$

$$\Leftrightarrow \quad g(X)I_n = K(XI_n - A) \qquad \in M_{n\times n}(R[X])$$

$$\Leftrightarrow g(X)I_n adj(XI_n - A) = K(XI_n - A)adj(XI_n - A)$$

$$\Leftrightarrow g(X)I_n adj(XI_n - A) = K\, det(XI_n - A)I_n$$

$$\Leftrightarrow g(X)I_n adj(XI_n - A) = KC_A(X)I_n$$

$$\Leftrightarrow \quad g(X)adj(XI_n - A) = KC_A(X) \text{ untuk suatu } K \in M_{n\times n}(R[X]) \ \blacksquare$$

Dengan kata lain, Teorema (2.11) mengatakan bahwa

$$g(X) \in N_A \Leftrightarrow C_A(X) | g(X)\Delta, \qquad \forall \Delta \in \mathrm{I}_{n-1}(XI_n - A),$$

dengan $\mathrm{I}_{n-1}(XI_n - A)$ menotasikan ideal di $R[X]$ yang dibangun oleh $(n-1)\times(n-1)$ minor dari matriks $XI_n - A$. Berikut diberikan contoh untuk mencari polinomial dalam N_A menggunakan Teorema (2.11).

Contoh 2.12

Misalkan R = ℤ/4Z dan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(R).$$

Diperoleh

$$XI_2 - A = \begin{bmatrix} X-1 & -2 \\ 0 & X-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X+3 & 2 \\ 0 & X+3 \end{bmatrix},$$

sehingga

$$det(XI_2 - A) = X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2 = X^2 + 2X + 1.$$

Minor-minor 1×1 tak nol dari matriks $XI_2 - A$ adalah $X+3$ dan 2. Menurut Teorema (2.11),berlaku

$$g(X) \in N_A \Leftrightarrow C_A(X) | (X+3)g(X).$$
$$g(X) \in N_A \Leftrightarrow C_A(X) | 2g(X).$$

Dari a) dan b), jelas bahwa $C_A(X)|2(X+3)$ sehingga dapat diambil$g(X) = 2(X+3) \in N_A$. Jika ideal yang dibangun oleh $g(X)$ didefinisikan sebagai

$$\langle g(X) \rangle = \{g(X)p(X) | p(X) \in R[X]\},$$

maka dari contoh (2.12) dapat dilihat bahwa $N_A = \langle (X+1)^2, 2(X+3) \rangle$. Dalam hal ini, walaupun $N_A \subseteq R[X]$ dan $\langle C_A(X) \rangle \subseteq R[X]$ ternyata N_A tidak selalu sama dengan $\langle C_A(X) \rangle$. Berikut ini diberikan akibat dari Teorema Cayley Hamilton dan Teorema (2.11) yang terkait dengan radikal dan prima minimal dari N_A dan $\langle C_A(X) \rangle$.

Akibat 2.13

Jika $A \in M_{n\times n}(R)$, maka $\sqrt{N_A} = \sqrt{\left(C_A(X)\right)}$.

Bukti:

Dari Teorema Cayley Hamilton diketahui bahwa $C_A(X) \in N_A$, sehingga $\langle C_A(X) \rangle \subseteq N_A$. Akibatnya, $\sqrt{\langle C_A(X) \rangle} \subseteq \sqrt{N_A}$. Selanjutnya, misalkan $g(X) \in N_A$. Jelas bahwa $g(X) \in \sqrt{N_A}$ dan menurut Teorema (2.11), maka

$$\begin{aligned}
& g(X)adj(XI_n - A) = KC_A(X) \text{ untuk suatu } K \in M_{n\times n}(R[X]) \\
\Leftrightarrow\ & g(X)adj(XI_n - A)(XI_n - A) = KC_A(X)(XI_n - A) \\
\Leftrightarrow\ & g(X)C_A(X)I_n = KC_A(X)(XI_n - A) \\
\Leftrightarrow\ & C_A(X)g(X)I_n = C_A(X)K(XI_n - A) \\
\Leftrightarrow\ & g(X)I_n = K(XI_n - A) \ \in M_{n\times n}(R[X]), \qquad (4)
\end{aligned}$$

dengan mengambil determinan kedua ruas Persamaan (4), dipereoleh**:**

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & det(g(X)I_n) = det\left(K(XI_n - A)\right) \\
\Leftrightarrow\ & \left(g(X)\right)^n = det(K)det(XI_n - A) \\
\Leftrightarrow\ & \left(g(X)\right)^n = det(K)C_A(X).
\end{aligned}$$

Sehingga $\left(g(X)\right)^n \in \langle C_A(X) \rangle$, akibatnya $g(X) \in \sqrt{\langle C_A(X) \rangle}$. Jadi $\sqrt{N_A} \subseteq \sqrt{\langle C_A(X) \rangle}$. ■

Akibat 2.14

Jika $A \in M_{n\times n}(R)$, maka prima minimal pada N_A sama dengan prima minimal pada $\langle C_A(X) \rangle$.

Bukti:

Misalkan $\mathfrak{B}$ merupakan prima minimal pada N_A. Jelas bahwa $\sqrt{N_A} \subseteq \mathfrak{B}$. Dari Akibat (2.13), diperoleh $\langle C_A(X) \rangle \subseteq \mathfrak{B}$. Selanjutnya, dari Akibat (1.6) diketahui bahwa $\mathfrak{B}$ memuat prima minimal $\mathfrak{Q}$ pada $\langle C_A(X) \rangle$. Karena $\sqrt{\left(C_A(X)\right)} \subseteq \mathfrak{Q}$ dan dari Akibat (2.13), diperoleh $N_A \subseteq \mathfrak{Q}$. Sehingga, dari Akibat (1.6) diperoleh $\mathfrak{Q}$ memuat suatu ideal prima $\mathfrak{B}_1$ pada N_A. Diketahui bahwa $N_A \subseteq \mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{B}$. Karena $\mathfrak{B}$ prima minimal pada N_A, dapat diambil kesimpulan bahwa $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1$. Padahal, $\mathfrak{B} = \mathfrak{Q}$ sehingga $\mathfrak{B}$ merupakan prima minimal pada $\langle C_A(X)\rangle$. ■

Dengan kata lain, akibat ini menunjukkan bahwa setiap prima minimal pada $\langle C_A(X)\rangle$ merupakan prima minimal pada N_A.

3. Kesimpulan

1. Jika diberikan ring komutatif R, maka dapat dibentuk ring komutatif $R[X]$ dan ring $M_{n\times n}(R[X])$. Selanjutnya, Jika diberikan ring $\left(M_{n\times n}(R)\right)[X]$, maka dapat dibentuk suatu pemetaan $\psi: M_{n\times n}(R[X]) \to \left(M_{n\times n}(R)\right)[X]$ dengan $\psi(A) = \sum_{j=0}^{p} A_j X^{p-j}$. Diperoleh $M_{n\times n}(R[X]) \cong \left(M_{n\times n}(R)\right)[X]$ melalui pemataan ψ.
2. Secara umum, Teorema Cayley-Hamilton pada matriks atas lapangan masih tetap berlaku untuk matriks atas ring komutatif.
3. Walaupun ideal null A belum tentu sama dengan ideal yang dibangun oleh $C_A(X)$ yaitu $N_A \neq \langle C_A(X)\rangle$, ternyata radikal dan prima minimal dari dua ideal tersebut sama.

Daftar Pustaka

Anton, H., Rorres, C.W., 2004. *Elementary Linear Algebra*. John Wiley & Sons,Inc

Brown, C.W.,1993. *Matrices Over Commutative Rings*. MARCEL DEKKER,INC

Dummit, S.D., Foote, M.R., 2004. *Abstract Algebra Third Edition*. John Wiley & Sons, Inc

John B Fraeleigh, 1994. *A First Course in Abstract Algebra*, Addison Wesley Publishing Company Inc, United States