

# **OPTIMASI MODEL INVESTASI, PRODUKSI DAN KONSUMSI DENGAN MENGGUNAKAN FUNGSI LOGARITMA SEBAGAI FUNGSI UTILITAS**

**(Optimization of Model of Investment , Production and Consumption Using  
Logarithm Function as The Utility Function)**

**Sugiyarto Surono<sup>1</sup> dan Ismail Bin Mohd<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Science  
Ahmad Dahlan University, Yogyakarta, Indonesia  
sugiyartof@yahoo

<sup>2</sup>Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology  
University College of Science and Technology Malaysia  
Mengangang Telipot 21030 KualaTerengganu, Malaysia  
[ismailmohd@yahoo.com](mailto:ismailmohd@yahoo.com)

## **ABSTRAK**

**Penanaman modal, produksi dan konsumsi adalah tiga hal yang berkaitan. Total kekayaan dan pemasukan dari suatu proses produksi berubah setiap saat dan digambarkan senantiasa mengikuti model gerakan random Brownian. Makalah ini membicarakan bagaimana kita dapat memilih model investasi dengan menentukan jumlah konsumsi yang optimal. Adapun fungsi utilitas yang digunakan adalah fungsi logaritma sehingga dengan mengasumsikan kontrol konsumsi dan tingkat suku bunga bank adalah konstan maka penyelesaian eksplisit dapat diperoleh.**

**Kata kunci:** Fungsi utilitas, optimal kontrol, persamaan diferensial stokastik, model gerakan Brown.

## **ABSTRACT**

**Investment, production and consumption are the three factors interconnected. The worth of capital and income production is change by time through random Brownian motion. In this paper, it will be discussed how to choose the investment model or sum consumptions policies to maximize the expected discounted of utility function. In this paper, the utility function to be used is the logarithmic function utility and by assuming that consumption control and interest rate are constant. Then by this manner the explicit solution can be obtained.**

**Keywords:** Utility function, optimal control, stochastic differential equations, Brownian motion.

Makalah diterima 17 September 2005.

## 1. PENDAHULUAN

Salah satu Model stokastik dalam ekonomi adalah berkaitan dengan total produksi dan jumlah hutang dari suatu perusahaan. Nilai suatu kekayaan dilambangkan dengan  $K_t$  yang nilainya senantiasa berubah setiap waktu mengikuti jumlah investasi yang ada.

Pergerakan nilai kekayaan suatu perusahaan dan jumlah pemasukan dari suatu proses produksi dapat digambarkan mengikuti model gerakan Brown. Masalah dari penanam modal dalam hal ini, investor adalah senantiasa berkeinginan untuk memaksimalkan jumlah konsumsi atau pembelanjaan dari total nilai kekayaannya sehingga diperoleh keuntungan yang maksimum. Fungsi tujuan yang berkaitan dengan masalah diatas adalah memaksimalkan nilai

$$J = E \int_0^{\infty} e^{-dt} U(C_t) dt \quad (1.1)$$

beserta pembatas

$$d > 0, c_t = 0, \text{ dan } X_t > 0, \quad (1.2)$$

dengan  $U(C_t)$  adalah fungsi utilitas dengan (Fleming dan Pang, 2004),

$$C_t = c_t X_t \quad (1.3)$$

Dalam menyelesaikan permasalahan ini diperlukan kajian mengenai teori probabilitas yang merupakan dasar dari penyelesaian dalam bidang stokastik, demikian juga pengertian dasar dalam matematika keuangan (Steel, 2000).

Makalah ini dibagi menjadi lima bagian yaitu dalam Bagian 1 memaparkan latar belakang penelitian dan literatur yang berkenaan dengan makalah ini. Bagian 2, menyediakan beberapa definisi dan teorema yang berhubungan dengan makalah ini. Bagian 3 dipaparkan tentang rumusan masalah dari makalah ini dan dalam Bagian 4 disajikan diskusi dan penyelesaian dari rumusan masalah tersebut. Bagian 5 disertakan kesimpulannya.

## 2. DEFINISI DAN TEOREMA

### 2.1 Definisi 2.1 (Steel, 2000)

Koleksi variabel random  $\{X(t), t=0\}$  dikatakan mengikuti proses model gerakan Brown jika,

- (i)  $X(0) = 0$ ,
- (ii)  $\{X(t), t=0\}$  senantiasa tetap dan naik secara Independent,
- (iii) Untuk setiap  $t > 0$ ,  $X(t)$  berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi  $s^2 t$ .

Berdasarkan definisi diatas jika  $s = 1$ , maka proses tersebut dinamakan model gerakan Brown standar dan dinotasikan sebagai  $\{B(t), t=0\}$  dan ini dapat ditunjukkan,

$$E\left(\frac{X(t)}{s}\right) = \frac{1}{s} E(X(t)) = 0, \quad (2.1)$$

$$\text{dan } \text{Var}\left(\frac{X(t)}{s}\right) = \frac{1}{s^2} \text{Var}(X(t)) = \frac{s^2 t}{s^2} = t, \quad (2.2)$$

Dapat disimpulkan bahwa secara umum proses model gerakan Brown yang diberikan dalam Definisi 2.1, dapat dibawa kebentuk proses standar dengan memisalkan  $X(t)/s$  sebagai variabel random.

### 2.2 Definisi 2.2 (Kao dan Edward, 1996)

Dimisalkan  $B(t)$  memenuhi sifat proses model gerakan Brown standar, dan  $X = \{X(t), t=0\}$  adalah proses stokastik maka persamaan yang didefinisikan

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dB(t)$$

disebut persamaan diferensial stokastik.

### 2.3 Teorema 2.1 Ito's Lemma

(Oksendal, 1995)

Jika  $F(X_t, t)$  fungsi yang dapat didiferensialkan dua kali terhadap  $t$  dan  $X_t$  adalah proses random dengan persamaan diferensial Ito

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB(t),$$

maka

$$dF = F_x dX_t + F_t dt + \frac{1}{2} F_{xx} s_t^2 dt .$$

### 3. RUMUSAN MASALAH

Misalkan  $N_t$  dan  $P_t$  melambangkan jumlah unit produksi dan satuan unit harga pada waktu  $t$ . Maka total dari pendapatan  $K_t$  adalah

$$K_t = N_t P_t \quad (3.1)$$

Jika  $I_t$  adalah investasi rata-rata, maka dapat diperoleh,

$$I_t dt = P_t dN_t$$

yang menggambarkan bahwa perubahan jumlah investasi sama dengan harga persatuan unit produksi dikalikan dengan perubahan jumlah produksi. Dengan mendiferensialkan persamaan (3.1) terhadap  $t$  maka diperoleh,

$$\begin{aligned} dK_t &= N_t dP_t + P_t dN_t = N_t P_t \frac{dP_t}{P_t} + P_t dN_t \\ &= K_t \frac{dP_t}{P_t} + P_t dN_t = K_t \frac{dP_t}{P_t} + I_t dt . \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dimisalkan bahwa  $Y_t$  menunjukkan rata-rata pemasukan dari suatu proses produksi maka dapat dituliskan persamaan sebagai berikut,

$$Y_t dt = b_t N_t dt \quad (3.3)$$

dengan  $b_t$  adalah koefisien produktifitas.

Jika  $L_t$  dan  $C_t$  masing-masing melambangkan jumlah hutang dan konsumsi rata-rata pada waktu  $t$ , maka persamaan perubahan jumlah hutang dapat dituliskan sebagai berikut,

$$dL_t = [r_t L_t + I_t + C_t - Y_t] dt, \quad (3.4)$$

dengan  $r_t$  adalah tingkat suku bunga rata-rata. Diandaikan bahwa tingkat suku bunga bank adalah konstan.

Dengan menggunakan hubungan antara  $K_t$  dan  $L_t$  maka total kekayaan pada waktu  $t$  yang dinotasikan dengan  $X_t$  adalah,

$$X_t = K_t - L_t . \quad (3.5)$$

Berdasarkan persamaan (3.1) hingga (3.4) serta dengan mendiferensialkan persamaan (3.5) terhadap  $t$  maka diperoleh persamaan,

$$dX_t = K_t \frac{dP_t}{P_t} + I_t dt - r_t L_t dt - I_t dt - C_t dt + b_t N_t dt \quad (3.6)$$

$$= X_t \left[ \frac{K_t}{X_t} \frac{dP_t}{P_t} - r_t \left( \frac{K_t - X_t}{X_t} \right) dt - \frac{C_t}{X_t} dt + b_t \frac{K_t}{P_t} \frac{1}{X_t} dt \right] \quad (3.7)$$

Dengan perantaraan persamaan (1.3) dan  $k_t = K_t/X_t$ , dan tingkat suku bunga dianggap konstan ( $r_t = r$ ) diperoleh,

$$dX_t = X_t \left[ k_t \frac{dP_t}{P_t} - \left( r(k_t - 1) + c_t - b_t \frac{k_t}{P_t} \right) dt \right] \quad (3.8)$$

Pergerakan nilai  $P_t$  dimodelkan mengikuti model gerakan Brown  $\tilde{w}_t$ , persamaan diferensial stokastiknya adalah,

$$dP_t = P_t \left[ \mathbf{m}(P_t) dt + \tilde{\mathbf{S}} d\tilde{w}_t \right],$$

dengan  $\tilde{\mathbf{S}} > 0$ ,  $\tilde{w}_t$  model gerakan Brown standar, dan  $\mu(P_t)$  pada persamaan (3.9) mempunyai penyelesaian tunggal yang positif jika  $P_0 > 0$ . Jika  $\mu(P_t) = \mu$  (konstan) maka  $P_t$  disebut model gerakan Brown logaritma.

Pergerakan produktifitas  $b_t$  dimodelkan mengikuti model gerakan Brown  $w_t$  yang senantiasa berubah terhadap perubahan waktu

$$b_t dt = b dt + s dw_t, \quad (3.10)$$

dengan  $b > 0$ ,  $s > 0$ ,  $w_t$  model gerakan Brown standar. Model gerakan Brown  $\tilde{w}_t$  dan  $w_t$  dimisalkan berkorelasi dan nilainya

$$E(\tilde{w}_t \cdot w_t) = \mathbf{r} t, \quad |\mathbf{r}| \leq 1 . \quad (3.11)$$

dengan  $E(\tilde{w}) \cdot E(w) = 0$ .

Bentuk formal dari persamaan (3.8) sekarang diberikan dalam bentuk,

$$dX_t = X_t \left[ \left( m(P_t) + \frac{b}{P_t} - r \right) k_t dt + (r - c_t) dt + \tilde{S} k_t d\tilde{w}_t + \frac{s k_t}{P_t} dw_t \right] \quad (3.12)$$

Dengan memilih kontrol investasi  $k_t$ , kontrol konsumsi  $c_t$  dan variabel tetap  $X_t$  dan  $P_t$ ,  $d > 0$  serta fungsi utilitasnya  $U(c_t X_t)$  akan ditentukan berapa nilai variabel kontrol agar diperoleh hasil yang maksimum, hal ini dapat ditulis sebagai berikut

$$J = E \int_0^{\infty} e^{-dt} U(c_t X_t) dt \quad (3.13)$$

Dengan fungsi pembatasnya  $c_t, k_t = 0$  dan  $X_t > 0$ .

#### 4. DISKUSI DAN PENYELESAIAN MASALAH

Dalam makalah ini digunakan fungsi logaritma sebagai fungsi utilitasnya yaitu,

$$U(C) = \log C, \quad (4.1)$$

dengan  $c_t = C_t/X_t$  bernilai konstan  $c$ . Berdasarkan asumsi ini kebijakan untuk penanaman modal secara optimal dapat diperoleh

$$J = E \int_0^{\infty} e^{-dt} U(c_t X_t) dt, \quad d > 0$$

$$= E \int_0^{\infty} e^{-dt} \log(c_t X_t) dt$$

$$= E \int_0^{\infty} e^{-dt} (\log c + \log X_t) dt$$

$$= \frac{1}{d} \log c + \int_0^{\infty} e^{-dt} E[\log X_t] dt.$$

Dengan mengaplikasikan aturan dalam Teorema 2.1 untuk  $D \log X_t$  maka diperoleh,

$$E[\log X_t] = \log X_0 + (r - c)T + \dots$$

$$E \left[ \int_0^T \left( m(P_t) + \frac{b}{P_t} - r \right) dt - \int_0^T \left( \frac{1}{2} \tilde{S}^2 k_t^2 + \frac{s^2 k_t^2}{P_t^2} + \frac{\tilde{S} s k_t^2}{P_t} r \right) dt \right]$$

$$E[\log X_t] = \log x_0 + \int_0^T E[Q(k_t, P_t)] dt + (r - c)T \quad (4.3)$$

dengan  $x_0 = X_0$  jumlah kekayaan awal,

$$Q(k_t, P_t) = -\frac{a_1(P_t)}{2} k_t^2 + a_2(P_t) k_t, \quad (4.4)$$

$$a_1(P_t) = \frac{1}{P_t^2} (\tilde{S}^2 P_t^2 + 2r \tilde{S} P_t + s^2), \quad (4.5)$$

$$a_2(P_t) = m(P_t) + \frac{b}{P_t} - r. \quad (4.6)$$

Jika  $P_0 > 0$ , maka diperoleh  $P_t > 0$ . Oleh karena itu untuk setiap  $P_t$ ,  $Q(k_t, P_t)$  adalah maksimum dengan pembatas  $k_t = 0$ , dengan  $k_t$  didefinisikan sebagai berikut

$$k_t = \begin{cases} \frac{a_2(P_t)}{a_1(P_t)} & (a_2(P_t) \geq 0) \\ 0 & (a_2(P_t) < 0) \end{cases} \quad (4.7)$$

sehingga persamaan (4.3),  $E[\log X_t]$  mencapai nilai maksimum jika diberikan  $k$  untuk  $0=t=T$  dan nilainya seperti disajikan pada persamaan (4.7). Berdasarkan uraian di atas maka diperoleh preposisi sebagai berikut; **Preposisi:** Untuk sebarang  $T > 0$  dan kontrol konsumsi diketahui konstan ( $C_t = c$  untuk  $0=t=T$ ) maka kontrol investasi  $k_t$  untuk  $0=t=T$  menjadikan  $E[\log X_t]$  akan mencapai maksimum.

#### 5. KESIMPULAN

Berdasarkan uraian dari bagian empat dapat disimpulkan bahwa untuk sebarang  $T > 0$ , penyelesaian eksplisit dari penyelesaian

fungsi tujuan  $J = E \int_0^{\infty} e^{-dt} \log(c_t X_t) dt$  dapat (4.2)

diperoleh dan fungsi akan mencapai maksimum yang hanya tergantung pada nilai kontrol investasi yaitu  $k_t$  dengan asumsi bahwa  $c_t = c$  adalah konstan dan  $0=t=T$ .

#### DAFTAR PUSTAKA

- Oksendal, B., 1995, *Stochastic Differential Equations*, Springer.  
 Fleming, W, H., and Pang, T., 2004, *Stochastic Control Model of Investment, Production, and Consumption*.  
 Kao, P. C., and Edward, 1996, *An Introduction to Stochastic Processes*, Duxbury Press.  
 Steel, M.J, 2000, *Stochastic Calculus and Finance*.