BATAS ATAS BILANGAN RAMSEY UNTUK GRAF BINTANG DAN GRAF BIPARTIT LENGKAP

(Upper bound of Ramsey Number for Star Graph and Complete Bipartite Graph)

Isnaini Rosyida,
Jurusan Matemetika FMIPA UNNES

ABSTRAK

Misal G dan H dua buah graf sebarang, bilangan Ramsey R(G,H) adalah bilangan asli terkecil n sehingga untuk setiap graf F dengan n titik akan memuat G atau komplemen dari F memuat H. Makalah ini akan membahas batas atas dari bilangan Ramsey untuk graf bintang S_n dan graf bipartit lengkap $K_{p,q}$. Khususnya, kita akan menunjukkan batas atas dari $R(S_n, K_{2,q})$ serta batas atas dari $R(S_n, K_{p,q})$ untuk n = 5, 3 = p = n-1 dan q = 2.

Kata Kunci : Bilangan Ramsey, Graf Bintang dan Bipartit

ABSTRACT

Suppose G and H are arbritary graphs, Ramsey number R(G,H) is the smallest natural number for every graph F with n points which will include G and the complement of F include H. This article discuss the upper band of Ramsey number for star graph S_n and complete bipartite graph $K_{p,q}$. Specifically we will show the upper bound of $R(S_n, K_{2,q})$ and $R(S_n, K_{p,q})$ for n = 5, 3 = p = n-1 and q = 2.

Keywords: ransey number, Star and Bipartite Graph.

1. PENDAHULUAN

Semua graf dalam tulisan ini sederhana dan hingga. Misal G=G(V,E) adalah graf dengan himpunan titik $V \neq f$, dan himpunan sisi E. Banyaknya titik dari graf G dinotasikan dengan $|G| = |V(G)|$. Jika $e = \{u, v\} = uv \in E(G)$ dengan $u, v \in V(G)$ maka titik u disebut bertetangga dengan titik v atau v tetangga dari u dan sebaliknya. Untuk sebarang $v \in V(G)$ dan $B \subseteq V(G)$, definisi $N_B(V) = \{x \in B : vx \in E(G)\}$ dan $N_B[v] = \{v\} \cup N_B(v)$. Derajat dari titik x didefinisikan sebagai $d(x) = |N_v(x)|$, $\Delta(G) = maks\{d(x) | x \in V(G)\}$. Komplemen dari garf G dinotasikan dengan $\overline{G}$. Untuk sebarang himpunan $B \subset V(G)$, $G[B]$ menyatakan subgraf dari G yang diinduksi oleh B. Himpunan B dikatakan bebas *(independent)* jika tidak ada dua titik di B yang bertetangga.

Graf yang berupa lingkaran dengan n titik dinotasikan dengan C_n. Graf yang berupa pohon dengan n titik dinotasikan dengan T_n, Graf G dikatakan graf k-reguler jika setiap titik di G berderajat k. Graf G dikatakan graf bipartit jika V(G) dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2 sedemikian hingga setiap sisi di E(G) menghubungkan suatu titik di V_1 dengan suatu titik di V_2. Graf Bipartit dikatakan lengkap jika setiap titik di V_1 bertetangga dengan setiap titik di V_2. Graf bipartit lengkap dengan partisi V_1, V_2 dimana $|V_1| = p$ dan $|V_2| = q$ dinotasikan dengan $K_{p,q}$. Sedangkan S_n adalah graf bintang dengan n titik, yaitu graf dengan satu titik pusat yang bertetangga dengan n-1 titik lain yang berderajat satu. Graf bintang ini juga dapat dinyatakan sebagai $K_{1,n-1}$.

Diberikan dua graf G dan H. Bilangan Ramsey R(G,H) adalah bilangan asli terkecil n sedemikian hingga untuk setiap graf F dengan n titik akan memuat G atau $\overline{F}$ memuat H. Graf F disebut (G,H)-*goodgraph* jika F tidak memuat G dan $\overline{F}$ tidak memuat H. Sebarang (G,H)-*goodgraph* dengan n titik dinotasikan dengan (G,H,n)-*goodgraph*. Bilangan Ramsey R(G,H) juga dapat didefinisikan sebagai bilangan asli terkecil n sehingga tidak ada (G,H,n)-*goodgraph*.

Studi tentang bilangan Ramsey suatu graf telah berkembang dengan pesat dan banyak dijadikan sebagai obyek riset. Salah satu hasil yang sangat penting dalam penentuan bilangan Ramsey suatu graf diberikan oleh Chavatal dan Harary (1972).

Dalam salah satu papernya Chavatal dan Harary, 1972 menetapkan suatu batas bawah: $R(G,H) \geq (|V(G)-1|)(c(H)-1)+1$, dengan $c(H)$ bilangan kromatik dari graf H. Dengan demikian kita dapat menentukan bilangan Ramsey melalui batas bawahnya terlebih dahulu. Lebih jauh, Chavatal telah menunjukkan $R(T_n, K_m) = (n-1)(m-1)+1$.

Hasil – hasil penelitian tentang bilangan Ramsey suatu graf telah banyak diperoleh, untuk mengkaji lebih lanjut dapt dilihat pada Radziszowski, 2002. Secara khusus, Parsons, 1976 telah menunjukkan: $R(K_{2,3}, K_{1,7}) = 13$. Parsons, 1975 juga telah menunjukkan: $R(C_4, K_{1,n}) < n + \sqrt{n} + 1$ untuk $n \geq 2$. Berikutnya Lawrence, 1973 telah menunjukkan bahwa: $R(K_{2,2}, K_{1,15}) = 20$.

Pada makalah ini kita akan menunjukkan batas atas dari $R(S_n, K_{2,q})$ untuk n = 4 dan q = 2; serta batas atas dari $R(S_n, K_{2,q})$ untuk 3 = p = n-1 dan q = 2.

2. HASIL UTAMA

Batas atas dari bilangan Ramsey untuk graf bintang dan graf bipartit lengkap akan ditunjukkan dalam teorema 1 dan teorema 2 di bawah ini.

Teorema 1.
$R(S_n, K_{2,q}) \leq 2n + q - 4$ untuk $n \geq 4$ dan $q \geq 2$

Bukti. Misal F sebarang graf dengan $|F| = 2n + q - 4$ untuk n = 4 dan q = 2 dan F tidak memuat S_n. Karena F tidak memuat S_n maka $|N(x)| \leq n-2, \forall x \in V(F)$. Jika $|N(x)| = 0, \forall x \in V(F)$ maka $\overline{F}$ merupakan graf K_{2n+q-4} ($\overline{F}$ memuat $K_{2,q}$). Jadi tidak mungkin $|N(x)| = 0, \forall x \in V(F)$. Akibatnya pasti terdapat $x \in V(F)$ dengan $|N(x)| \geq 1$. Pilih $x \in V(F)$ dengan $|N(x) \geq 1|$. Tulis $Q = V(F)N[x]$. Maka $|Q| \geq n + q - 3$. Ambil $y \in N(x)$ sebarang dan definisikan $R=Q\backslash N_Q(y)$. Karena $|R| \geq q$ maka $\overline{F}[\{x\} \cup \{y\} \cup R]$. Akan memuat $K_{2,q}$ di $\overline{F}$. Jadi $R(S_n, K_{2,q}) \leq 2n + q - 4$.

Selanjutnya akan diberikan batas atas secara umum dari bilangan Ramsey untuk $R(S_n, K_{p,q})$ yang akan dibuktikan dalam teorema 2 di bawah ini.

Teorema 2. Misal $n \in \aleph$ dan $n \geq 5$.
$R(S_n, K_{p,q}) \leq (p-1)(n-3) + (n-1) + q$ untuk $3 \leq p \leq n-1$ dan $q \geq 2$

Bukti. Diberikan $n \in \aleph$ dan $n \geq 5$. Misal F sebarang graf dengan $|F| = (p-1)(n-3) + (n-1) + q$ untuk $3 \leq p \leq n-1$ dan F tidak memuat S_n. Akan ditunjukkan $\overline{F} \supseteq K_{p,q}$. Karena F tidak memuat S_n maka $|N(x)| \leq n-2, \forall x \in V(F)$.

Misalkan terdapat $x \in V(F)$ dengan $|N(x)| \leq n-k$ untuk k = 3. Tulis $A = V(F)N[x]$ dan $B = A \backslash \bigcup_i N_A(v_i), \forall v_i \in N(x)$, maka

$$|A| \geq \{(P-1)(n-3) + (n-1) + q\} - \{n-k-1\}$$
$$= (p-1)(n-3) + (k-2) + q$$

Misal ada salah satu $v_j \in N(x)$ dengan $i \leq |N_A(v_j)| \leq n-4$.

Maka,

$$
\begin{aligned}
|B| &\geq \{(p-1)(n-3)+(k-2)+q\}-\{(n-3)(n-k-1)+(n-k)\}\\
&=\{(p-k)(n-3)+(k-2)+q\}-\{(n-3)(n-k-1)+((n-3)-1)\}\\
&=\{(p-1)(n-3)+(k-2)+q\}-\{(n-3)[(n-k-1)+1]-1\}\\
&=\{(p-1)(n-3)+(k-2)+q\}-(n-3)(n-k)+1\\
&=\{(p-1)(n-3)+(k-2)+q\}+(n-3)(-n+k)+1\\
&\geq (n-3)((p-1)+(-n+k))+k+q-1\\
&=(n-3)(p-n+k-1)+k+q-1\\
&\geq 2(p-n+k-1)+k+q-1\\
&\geq 2p-2n+3(k-1)+q\\
&\geq 2p-2n+3.2+q\\
&=2p-2n+q+6
\end{aligned}
$$

Definisi $B_0 = B \setminus \bigcup_i N_B(y_i), \forall y_i \in N_A(v_j)$.

Maka

$$
\begin{aligned}
|B| &\geq \{2p-2n+q+6\}-\{(n-3)(n-4)\}\\
&=\{2p-2n+q+6\}+(n-3)(n-4)\\
&\geq 2p-2n+q+6+(-n+3) \quad \text{(karena maka n-4 = 1)}\\
&=2p-3n+q+9=2p+q-3(n-3)\\
&\geq 2p+q-3.2 \quad \text{(karena n = 5)}\\
&=2p+q-6\geq q
\end{aligned}
$$

(karena p = 3 maka 2p-6 = 0)

Tulis $D = N[x] \cup N_A(v_j)$.

Karena $1 \leq |N(x)| \leq n-k$ dengan k = 3 dan $1 \leq |N_A(v_j)| \leq n-4$ maka $|D| \geq n-1$. Setiap titik di D tidak dapat bertetangga dengan setiap titik di B_0. Akibatnya $\overline{F}[D \cup B_0]$ memuat $K_{p,q}$ dengan $3 \leq p \leq n-1$. Dengan demikian tidak mungkin terdapat $v_j \in N(x)$ dengan $|N_A(v_j)| \leq n-4$.

Jadi $|N_A(v_i)| > n-4, \forall v_i \in N(x)$. Ini berarti haruslah $|N_A(v_i)| = n-3$ untuk setiap $v_i \in N(x)$. Akibatnya,

$$
\begin{aligned}
[B] &\geq \{(p-1)(n-3)+(k-2)+q\}-(n-3)(n-3)\\
[B] &\geq \{(p-1)(n-3)+(k-2)+q\}+(-n+3)(n-3)\\
&\geq \{(p-1).2+(k-2)+q\}+(-n+3).2\\
&\geq 2p+k+q-2n+2
\end{aligned}
$$

= Ambil $v_i \in N(x)$ sebarang.

Definisikan E = B \ $N_B(v_i)$.

Maka,

$$
\begin{aligned}
|E| &\geq 2p+k+q-2n+2-(n-3)(n-3)\\
&\geq 2p+k+q-2n+2+\{(-n+3)(n-3)\}\\
&\geq 2p+k+q-2n+2+2.(-n+3)\\
&\geq 2p+k+q-2(n-4)\\
&\geq 2p+k+q-2=2p+q+(k-2) \quad \text{(karenan-4 = 1)}\\
&\geq 2p+q\geq q \quad \text{(karena k-2 = 1)}
\end{aligned}
$$

Tulis $X = N[x] \cup N_A(v_i)$.

Karena $1 \leq |N(x)| \leq n-k$ dengan k = 3 dan $|N_A(v_i)| = n-3$ maka $[X \geq n-1]$. Setiap titik di X tidak dapat bertetangga dengan setiap titik di E. Akibatnya $\overline{F}[X \cup E]$ memuat $K_{p,q}$ dengan 3=p=n-1. Dengan demikian tidak mungkin terdapat $x \in V(F)$ dengan $|N(x)| \leq n-k$ untuk k = 3. Jadi haruslah $|N(x)| = n-2, \forall x \in V(F)$.

Sedangkan jika $|N(x)| = n-2, \forall \in V(F)$ maka,

$|A| \geq \{(p-1)(n-3)+(n-1)+q\}-\{n-1\} = (p-1)(n-3)+q$ dan $|B| \geq (p-1)(n-3)+q-(n-3)(n-2) \geq q$

setiap titik di $N[x]$ tidak dapat bertetangga dengan setiap titik di B. Akibatnya $\overline{F}[N[x] \cup B]$ memuat $k_{p,q}$ dengan p=n-1.

Dengan demikian terbukti bahwa $R(S_n, K_{p,q}) \leq (p-1)(n-3)+(n-1)+q$ untuk $3 \leq p \leq n-1$ dan q = 2.

3. KESIMPULAN

Jadi kita dapat menentukan bilangan Ramsey untuk graf bipartit lengkap melalui batas atasnya yang telah ditunjukkan pada teorema 1 dan 2 di atas. Pada makalah yang lain, kita pernah menunjukkan bahwa $R(S_n, K_{p,q}) = p+q+2$ dengan p,q=2; R(S_5, $K_{2,q}$) =q+5 untuk q genap dan q=2 serta R(S_5, $K_{2,q}$)=q+6 untuk q ganjil dan q=3.

Daftar Pustaka

Chavatal, V and F. Harary, 1972, "Generalized Ramsey Theory for Graphs,III", Small aff Diagonal Numbers, **Pas Journal Math**, 41, 335-345.

Lawrence, S.L., 1973, "Cycle-Star Ramsey Numbers", **Notices Amer. Math.Soc**, 20.

Parsons, T.D., 1975, "Ramsey Graph and Block Designs I", **Trans. Amer. Soc**., 209.

Parsons, T.D., 1976, "Ramsey Graphs and Block Designs", **Journal of Combinatorial Theory,** Series A, 20, 12-19

Radziszowski, S.P., 2002, "Small Ramsey Numbers", **The Electronic Journal of Combinatorics**.