ALJABAR MAX-PLUS BILANGAN KABUR
(Fuzzy Number Max-Plus Algebra)

M. Andy Rudhito[1], Sri Wahyuni[2], Ari Suparwanto[2] dan F. Susilo[3]

[1]Jurusan Pendidikan Matematika dan IPA, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta
rudhito@staff.usd.ac.id
[2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta
swahyuni@ugm.ac.id , ari_suparwanto@yahoo.com
[3]Jurusan Matematika, Universitas Sanata Dharma,Yogyakarta
fsusilo@staff.usd.ac.id

INTISARI

Makalah ini membahas suatu aljabar himpunan semua bilangan kabur (*fuzzy number*) yang dilengkapi dengan operasi maximum dan penjumlahan. Aljabar ini merupakan perluasan aljabar max-plus melalui aljabar max-plus interval dan Teorema Dekomposisi dalam himpunan kabur. Dapat ditunjukkan operasi maximum dan penjumlahan yang didefinisikan melalui potongan-alfa tertutup dalam himpunan semua bilangan kabur tersebut. Selanjutnya himpunan semua bilangan kabur yang dilengkapi dengan operasi maximum dan penjumlahan tersebut merupakan semiring idempoten komutatif.

Kata-kata kunci: semiring , idempoten, aljabar max-plus, bilangan kabur.

ABSTRACT

This paper discussed an algebra of the set of all fuzzy number that completed by maximum and addition operation. This algebra is an extension of max-plus algebra through interval max-plus algebra and Decomposition Theorem in fuzzy set. The finding show that maximum and addition operation through alpha-cut is closed in this set of all fuzzy number. Furthermore, the set of all fuzzy number that completed by maximum and addition operation is a commutative idempotent semiring.

Keywords : semiring, idempotent, max-plus algebra, fuzzy number

1. LATAR BELAKANG

Aljabar max-plus (himpunan **R** $\cup\{-\infty\}$, dengan **R** adalah himpunan semua bilangan real, yang dilengkapi dengan operasi maximum dan penjumlahan) telah digunakan untuk memodelkan dan menganalisis jaringan untuk waktu aktifitas deterministik. Dalam masalah pemodelan dan analisa suatu jaringan di mana waktu aktifitasnya belum diketahui dengan pasti, waktu aktifitas jaringan dimodelkan dalam suatu bilangan kabur (*fuzzy number*).

Akhir-akhir ini telah berkembang pemodelan jaringan yang melibatkan bilangan kabur. Pemodelan dan analisa suatu sistem jaringan yang melibatkan bilangan kabur, sejauh penulis ketahui, belum ada yang menggunakan pendekatan aljabar max-plus. Dengan pendekatan ini maka akan diperlukan pembahasan mengenai suatu aljabar dengan elemen-elemennya berupa bilangan kabur dengan operasi maximum dan penjumlahan yang didefinisikan di dalamnya. Aljabar ini diharapkan dapat memberikan landasan analisa jaringan dengan waktu aktifitas kabur melalui pendekatan aljabar max-plus .

Konsep-konsep dasar aljabar max-plus secara lengkap telah dibahas dalam Bacelli, *et al*. (2001), di mana aljabar max-plus merupakan semifield yaitu semiring komutatif yang setiap elemen taknolnya mempunyai invers terhadap operasi perkalian. Operasi-operasi aritmatika seperti +, –, $\times$, /, max dan min pada bilangan kabur pada umumnya didefinisikan dengan menggunakan Prinsip Perluasan (*Extension Principle*) dan dengan menggunakan potongan-α (α-*cut*) yang didasarkan pada Teorema Dekomposisi. Hal ini dapat dilihat dalam Zimmerman, H.J. (1991) Lee, K.H. (2005) dan Susilo, F. (2006). Dalam Susilo, F. (2006) ditegaskan bahwa setiap bilangan kabur dapat dinyatakan secara tunggal dengan menggunakan potongan-α-nya. Karena potongan-α suatu bilangan kabur berupa interval tertutup maka operasi-operasi aritmatika pada bilangan kabur dapat dinyatakan menggunakan operasi-operasi aritmatika interval tertutup. Ditegaskan juga dalam Susilo, F. (2006) bahwa operasi bilangan kabur dengan menggunakan Prinsip Perluasan dan dengan menggunakan potongan-α adalah ekivalen. Pembahasan mengenai semiring telah dikembangkan ke dalam Analisis Interval Idempoten oleh Litvinov, G.L., Sobolevskii, A.N. (2001). Analisis Interval Idempoten ini membahas semiring dengan elemen-elemennya berupa interval tertutup. Dalam literatur di atas dikatakan bahwa himpunan semua interval tertutup dalam suatu semiring idempoten juga merupakan semiring idempoten dengan operasi yang bersesuaian. Ditunjukkan juga bahwa sifat-sifat yang dimiliki semiring juga dimiliki oleh semiring himpunan semua interval tertutup tersebut.

Dengan memperhatikan hasil-hasil di atas, aljabar max-plus dapat diperluas ke dalam aljabar max-plus interval, di mana elemen-elemennya berupa interval tertutup dalam aljabar max-plus tersebut. Selanjutnya dengan mengambil pengoperasian maximum dan penjumlahan bilangan kabur melalui potongan-α-nya, akan dapat dikembangkan struktur aljabar max-plus bilangan kabur. Terlebih dahulu akan ditinjau beberapa konsep dasar dan hasil dalam aljabar max-plus, himpunan kabur dan bilangan kabur yang menjadi landasan pembahasan aljabar max-plus bilangan kabur.

2. TINJAUAN TEORI

2.1 Aljabar Max-Plus

Dalam bagian ini ditinjau konsep dasar aljabar max-plus. Pembahasan selengkap-nya dapat dilihat pada Baccelli et.al (2001), Rudhito A (2003) dan Schutter (1996).

Suatu *semiring* (S**,** $+$, $\times$) adalah suatu himpunan tak kosong S yang dilengkapi dengan dua operasi biner + dan $\times$, yang memenuhi aksioma berikut:

i) $(S, +)$ adalah semigrup komutatif dengan elemen netral 0, yaitu $\forall a, b, c \in S$, $(a + b) + c = a + (b + c)$, $a + b = b + a$, $a + 0 = a$.

ii) $(S, \times)$ adalah semigrup dengan elemen satuan 1, yaitu $\forall a, b, c \in S$, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$, $a \times 1 = 1 \times a = a$,

iii) Elemen netral 0 merupakan elemen penyerap terhadap operasi $\times$, yaitu $\forall a \in S$, $a \times 0 = 0 \times a = 0$.

iv) Operasi + distributif terhadap $\times$, yaitu $\forall a, b, c \in S$, $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$, $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$.

Semiring $(S, +, \times)$ dikatakan *idempoten* jika operasi + bersifat idempoten, *yaitu* $\forall a \in S : a + a = a$, dan dikatakan *komutatif* jika operasi $\times$ bersifat komutatif. Suatu semiring komutatif $(S, +, \times)$ disebut *semifield* jika setiap elemen tak netralnya mempunyai invers terhadap operasi $\times$. Jika $(S, +)$ merupakan semigrup komutatif idempoten maka relasi "$\preceq$" yang didefinisikan pada S dengan $x \preceq y \Leftrightarrow x + y = y$ merupakan urutan parsial pada S. Operasi + dan $\times$ dikatakan *konsisten* terhadap urutan "$\preceq$" dalam S bhb jika $x \preceq y$, maka $x + z \preceq y + z$ dan $x \times z \preceq y \times z$, $\forall x, y, z \in S$. Dapat ditunjukkan bahwa dalam semiring idempoten $(S, +, \times)$ operasi + dan $\times$ *konsisten* terhadap urutan $\preceq$ dalam S. Semiring $(S, +, \times)$ dengan elemen netral 0 dikatakan *tidak memuat pembagi nol* bhb jika $x \times y = 0$ maka $x = 0$ atau $y = 0$, $\forall x, y \in S$.

Diberikan $\mathbf{R}_\varepsilon := \mathbf{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\mathbf{R}$ adalah himpunan semua bilangan real dan $\varepsilon := -\infty$. Pada $\mathbf{R}_\varepsilon$ didefinisikan operasi berikut: $\forall a,b \in \mathbf{R}_\varepsilon$, $a \oplus b := \max(a, b)$ dan $a \otimes b := a + b$. Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring idempoten komutatif dengan elemen netral $\varepsilon = -\infty$ dan elemen satuan $e = 0$. Lebih lanjut $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semifield, yaitu bahwa $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring komutatif di mana untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ terdapat $-a$ sehingga berlaku $a \otimes (-a) = 0$. Kemudian $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ disebut dengan *aljabar max-plus*, yang selanjutnya cukup dituliskan dengan $\mathbf{R}_{\max}$.

Karena $(\mathbf{R}_{\max}, \oplus)$ merupakan semigrup komutatif idempoten, maka relasi "$\preceq_m$" yang didefinisikan pada $\mathbf{R}_{\max}$ dengan $x \preceq_m y \Leftrightarrow x \oplus y = y$ merupakan *urutan parsial* pada $\mathbf{R}_{\max}$. Lebih lanjut relasi ini merupakan *urutan total* pada $\mathbf{R}_{\max}$. Karena $\mathbf{R}_{\max}$ merupakan semiring idempoten, maka operasi $\oplus$ dan $\otimes$ *konsisten* terhadap urutan $\preceq_m$, yaitu $\forall a, b, c \in \mathbf{R}_{\max}$, jika $a \preceq_m b$, maka $a \oplus c \preceq_m b \oplus c$, dan $a \otimes c \preceq_m b \otimes c$. Aljabar max-plus $\mathbf{R}_{\max}$ *tidak memuat pembagi nol* yaitu $\forall x, y \in \mathbf{R}_\varepsilon$ berlaku: jika $x \otimes y = \varepsilon$ maka $x = \varepsilon$ atau $y = \varepsilon$.

2.2 Himpunan dan Bilangan Kabur

Berikut ditinjau pengertian dan konsep dasar himpunan dan bilangan kabur. Uraian lebih lengkap dapat dilihat dalam Zimmermann, H.J., (1991), Lee, K.H. (2005) dan Susilo, F. (2006).

Suatu himpunan A dalam semesta X dapat dinyatakan dengan *fungsi karakteristik* $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ yang didefinisikan dengan aturan

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{jika } x \in A \\ 0, \text{jika } x \notin A \end{cases} \text{ untuk setiap } x \in X.$$

Himpunan kabur $\tilde{K}$ dalam semesta X dinyatakan sebagai himpunan pasangan terurut $\tilde{K} = \{(x, \mu_{\tilde{K}}(x)) \mid x \in X\}$, di mana $\mu_{\tilde{K}}$ adalah fungsi keanggotaan himpunan kabur $\tilde{K}$, yang merupakan suatu pemetaan dari semesta X ke interval tertutup $[0, 1]$. *Pendukung* (*support*) suatu himpunan kabur $\tilde{K}$, dilambangkan dengan $pend(\tilde{K})$ adalah himpunan tegas (*crisp*) yang memuat semua anggota semesta yang mempunyai derajat keanggotaan taknol dalam $\tilde{K}$, yaitu $pend(\tilde{K}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{K}}(x) > 0\}$. *Tinggi* *(height)* suatu himpunan kabur $\tilde{K}$, dilambang-kan dengan *tinggi*($\tilde{K}$), didefinisikan sebagai *tinggi*($\tilde{K}$) = $\sup_{x \in X}\{\mu_{\tilde{K}}(x)\}$. Suatu himpunan kabur $\tilde{K}$ dikatakan *normal* jika *tinggi*($\tilde{K}$) = 1.

Gabungan dua buah himpunan kabur $\tilde{K}$ dan $\tilde{L}$ adalah himpunan kabur $\tilde{K} \cup \tilde{L}$ dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{K}\cup\tilde{L}}(x)$ = *max*{$\mu_{\tilde{K}}(x)$, $\mu_{\tilde{L}}(x)$} untuk setiap $x \in X$. Sedangkan *irisan* dua buah himpunan kabur $\tilde{K}$ dan $\tilde{L}$ adalah himpunan kabur $\tilde{K} \cap \tilde{L}$ dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{K}\cap\tilde{L}}(x)$ = *min*{$\mu_{\tilde{K}}(x)$, $\mu_{\tilde{L}}(x)$}, untuk setiap $x \in X$. Jika $\tilde{K}_1$, ..., $\tilde{K}_n$ adalah himpunan-himpunan kabur berturut-turut dalam semesta X_1, ..., X_n , maka hasilkali Cartesius $\tilde{K}_1 \times \ldots \times \tilde{K}_n$ adalah himpunan kabur dalam $X_1 \times \ldots \times X_n$ dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{K}_1\times\ldots\times\tilde{K}_n}(x_1, \ldots, x_n)$ = *min*{$\mu_{\tilde{K}_1}(x)$, ... , $\mu_{\tilde{K}_n}(x)$}.

Untuk suatu bilangan $\alpha \in [0, 1]$, *potongan-*α suatu himpunan kabur $\tilde{K}$, yang dilambangkan dengan pot$^{\alpha}$($\tilde{K}$) = K^{α}, adalah himpunan crisp (tegas) yang memuat semua elemen semesta dengan derajat keanggotaan dalam $\tilde{K}$ lebih besar atau sama dengan α, yang didefinisikan sebagai $K^{\alpha} = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{K}}(x) \geq \alpha\}$. Salah satu sifat potongan-α suatu himpunan kabur $\tilde{K}$ adalah jika $\alpha_1 \leq \alpha_2$ maka $K^{\alpha_2} \subseteq K^{\alpha_1}$,yang disebut dengan sifat tersarang (*nested*). Suatu himpunan kabur $\tilde{K}$ dikatakan *konveks* jika K^{α} konveks $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Teorema 1 (*Teorema Dekomposisi*) *Jika K^{α} adalah potongan-α himpunan kabur $\tilde{K}$ dalam semesta X dan $\tilde{K}^{\alpha}$ adalah himpunan kabur dalam X dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{K}^{\alpha}}(x) = \alpha\, \chi_{K^{\alpha}}(x)$, di mana $\chi_{K^{\alpha}}$ adalah fungsi karakteristik himpunan K^{α}, maka $\tilde{K} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \tilde{K}^{\alpha}$*

Bukti: Susilo, F. (2006, pp. 74 – 75).

Teorema 2 (*Teorema Representasi*) *Jika* $\{K^{\alpha}\}$, $\forall\alpha \in [0, 1]$ *adalah keluarga himpunan dalam semesta X yang memenuhi sifat tersarang (nested), yaitu jika $\alpha \leq \beta$ maka berlaku $K^{\alpha} \supseteq K^{\beta}$, $\forall\alpha, \beta \in$* [0, 1], *maka terdapat dengan tunggal himpunan kabur $\tilde{L}$ dalam semesta X sedemikian hingga* $L^{\alpha} = K^{\alpha}$, $\forall\alpha \in [0, 1]$.

Bukti: Didefinisikan himpunan kabur $\tilde{L}$ dalam semesta X yang fungsi keanggotaannya yang didefinisikan dengan $\mu_{\tilde{L}}(x) = \sup_{x\in K^{\alpha}} \alpha$. Ambil sembarang $\beta \in [0, 1]$. Ambil sembarang $x \in L^{\beta}$ akan ditunjukkan bahwa $x \in K^{\beta}$. Karena $x \in L^{\beta}$, maka $\beta \leq \mu_{\tilde{L}}(x) = \sup_{x\in K^{\alpha}} \alpha$. Karena sifat tersarang maka $K^{\beta} \supseteq K^{\delta}$ dan $K^{\delta} = \bigcap_{\alpha<\delta} K^{\alpha}$, dengan $\delta = \sup_{x\in K^{\alpha}} \alpha$. Karena $\delta = \sup_{x\in K^{\alpha}} \alpha$, maka $x \in \bigcap_{\alpha<\delta} K^{\alpha} = K^{\delta}$, sehingga $x \in K^{\beta}$. Jadi $L^{\beta} \subseteq K^{\beta}$ untuk setiap $\beta \in [0, 1]$. Ambil sembarang $\beta \in [0, 1]$. Ambil sembarang $x \in K^{\beta}$ akan ditunjukkan bahwa $x \in L^{\beta}$. Karena $x \in K^{\beta}$ dan sifat tersarang, maka $\beta \leq \sup_{x\in K^{\alpha}} \alpha$. Menurut definisi $\mu_{\tilde{L}}$ diperoleh $\beta \leq \mu_{\tilde{L}}(x)$, sehingga terbukti $x \in L^{\beta}$. Jadi $K^{\beta} \subseteq L^{\beta}$, untuk setiap $\beta \in [0, 1]$. Dengan demikan terbukti bahwa $K^{\beta} = L^{\beta}$. Andaikan terdapat himpunan kabur $\tilde{M}$ dalam semesta X sedemikian hingga $M^{\alpha} = K^{\alpha}$, $\forall\alpha \in [0, 1]$. Karena $K^{\alpha} = L^{\alpha}$, $\forall\alpha \in [0, 1]$, maka berakibat $M^{\alpha} = L^{\alpha}$, $\forall \alpha \in [0, 1]$, sehingga $\mu_{\tilde{L}} = \mu_{\tilde{M}}$, yang berarti $\tilde{M} = \tilde{L}$. Jadi terbukti terdapat dengan tunggal himpunan kabur $\tilde{L}$ dalam semesta X sedemikian hingga $L^{\alpha} = K^{\alpha}$, $\forall \alpha \in [0, 1]$. ■

Berikut ditinjau mengenai Prinsip Perluasan dalam himpunan kabur. Misalkan f adalah fungsi dari $X_1 \times ... \times X_n$ ke Y, dan $\tilde{K}_1, ..., \tilde{K}_n$ adalah himpunan-himpunan kabur berturut-turut dalam semesta $X_1, ..., X_n$. Fungsi f dapat diperluas menjadi fungsi bernilai kabur $\tilde{f} : \mathbf{F}(X_1 \times ... \times X_n) \to \mathbf{F}(Y)$, di mana $\mathbf{F}(X_1 \times ... \times X_n)$ dan $\mathbf{F}(Y)$ berturut-turut adalah himpunan kuasa kabur dari semesta $X_1 \times ... \times X_n$ dan Y, dengan aturan sebagai berikut. Untuk setiap himpunan kabur $\tilde{K}_1 \times ... \times \tilde{K}_n \in \mathbf{F}(X_1 \times ... \times X_n)$, $\tilde{f}(\tilde{K}_1 \times ... \times \tilde{K}_n)$ adalah himpunan kabur dalam $\mathbf{F}(Y)$ dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{f}(\tilde{K}_1 \times .. \times \tilde{K}_n)}(y) =$

$$\begin{cases} \sup\limits_{y = f(x_1,...,x_n)} \min\{\mu_{\tilde{K}_1}(x_1), ..., \mu_{\tilde{K}_n}(x_n)\} \\ \quad \text{jika } \exists (x_1, ..., x_n) \in X_1 \times ... \times X_n, \\ \quad\quad y = f(x_1, ..., x_n) \\ 0 \\ \quad \text{jika} \forall (x_1, ..., x_n) \in X_1 \times ... \times X_n, \\ \quad\quad y \neq f(x_1, ..., x_n) \end{cases}.$$

Bilangan kabur $\tilde{a}$ didefinisikan sebagai himpunan kabur dalam semesta $\mathbf{R}$ yang memenuhi sifat berikut:

i) normal, yaitu $a^1 \neq \emptyset$

ii) $\forall \alpha \in (0, 1]$, a^{α} adalah interval tertutup dalam $\mathbf{R}$, yaitu $\exists \underline{a^{\alpha}}, \overline{a^{\alpha}} \in \mathbf{R}$ dengan $\underline{a^{\alpha}} \leq \overline{a^{\alpha}}$ sedemikian sehingga $a^{\alpha} = [\underline{a^{\alpha}}, \overline{a^{\alpha}}] = \{x \in \mathbf{R} \mid \underline{a^{\alpha}} \leq x \leq \overline{a^{\alpha}}\}$.

iii) $pend(\tilde{a})$ terbatas.

Untuk $\alpha = 0$, didefinisikan bahwa $a^0 = [inf(pend(\tilde{a})), sup(pend(\tilde{a}))]$. Karena setiap interval tertutup dalam $\mathbf{R}$ adalah konveks maka a^{α} konveks $\forall \alpha \in [0, 1]$, sehingga $\tilde{a}$ konveks.

Suatu *bilangan kabur titik* $\tilde{a}$ adalah bilangan kabur dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 1, \text{ jika } x = a \\ 0, \text{ lainnya} \end{cases}.$$

Salah satu tipe bilangan kabur yang sederhana adalah *bilangan kabur segitiga*. Bilangan kabur segitiga $\tilde{a}$, yang dilambangkan dengan BKS(a_1, a, a_2), adalah suatu bilangan kabur dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a_1}{a - a_1}, & a_1 \leq x \leq a \\ \dfrac{a_2 - x}{a_2 - a}, & a < x \leq a_2 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

di mana $a_1 \neq a$ atau $a \neq a_2$.
Nampak bahwa potongan-α $\tilde{a}$ di atas adalah
$a^{\alpha} = [(a - a_1)\alpha + a_1, -(a_2 - a)\alpha + a_2]$ dan $pend(\tilde{a}) = (a_1, a_2)$.

Dua bilangan kabur $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$ dikatakan *sama* jika $\mu_{\tilde{a}} = \mu_{\tilde{b}}$. Karena $\mu_{\tilde{a}} = \mu_{\tilde{b}}$ maka berlaku $a^{\alpha} = b^{\alpha}$, $\forall \alpha \in [0, 1]$. Sebaliknya menurut Teorema Dekomposisi jika $a^{\alpha} = b^{\alpha}$, $\forall \alpha \in [0, 1]$, maka $\mu_{\tilde{a}} = \mu_{\tilde{b}}$. Dengan demikan dapat dikatakan bahwa $\tilde{a} = \tilde{b}$ jika dan hanya jika $a^{\alpha} = b^{\alpha}$, $\forall \alpha \in [0, 1]$. Operasi-operasi aritmatika bilangan kabur dapat didefinisikan dengan menggunakan prinsip perluasan atau dengan menggunakan potongan-α. Dengan menggunakan prinsip perluasan didefinisikan operasi-operasi bilangan kabur berikut. Misalkan $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$ adalah bilangan-bilangan kabur.

i) Maksimum $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$, yaitu $\tilde{a} \tilde{\oplus} \tilde{b}$ adalah himpunan kabur dengan fungsi keanggotaan: $\mu_{\tilde{a} \tilde{\oplus} \tilde{b}}(z) = \sup\limits_{z = x \oplus y} min\{\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)\}$.

ii) Penjumlahan $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$, yaitu $\tilde{a} \tilde{\otimes} \tilde{b}$ adalah himpunan kabur dengan fungsi keanggotaan: $\mu_{\tilde{a}\tilde{\otimes}\tilde{b})}(z)$ = $\sup_{z=x\otimes y} \min\{\ \mu_{\tilde{a}}(x),\ \mu_{\tilde{b}}(y)\}$.

Sedangkan dengan menggunakan potongan-α didefinisikan operasi-operasi bilangan kabur berikut. Misalkan $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$ adalah bilangan-bilangan kabur. dengan a^{α} = $[\underline{a}^{\alpha}, \overline{a}^{\alpha}]$dan b^{α} = $[\underline{b}^{\alpha}, \overline{b}^{\alpha}]$, di mana $\underline{a}^{\alpha}$ dan $\overline{a}^{\alpha}$ berturut-turut adalah batas bawah dan batas atas interval a^{α} , sedangkan untuk $\underline{b}^{\alpha}$ dan $\overline{b}^{\alpha}$ analog,

i') Maksimum $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$, yaitu $\tilde{a}\ \tilde{\oplus}\ \tilde{b}$ adalah himpunan kabur dengan potongan-α-nya adalah interval $[\underline{a}^{\alpha} \oplus \underline{b}^{\alpha},\ \overline{a}^{\alpha} \oplus \overline{b}^{\alpha}]$, untuk setiap $\alpha \in [0, 1]$.

ii') Penjumlahan $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$, yaitu $\tilde{a}\ \tilde{\otimes}\ \tilde{b}$ adalah himpunan kabur dengan potongan-α-nya adalah interval $[\underline{a}^{\alpha} \otimes \underline{b}^{\alpha},\ \overline{a}^{\alpha} \otimes \overline{b}^{\alpha}]$, untuk setiap $\alpha \in [0, 1]$.

3. CARA PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian yang didasarkan pada studi literatur yang meliputi kajian-kajian secara teoritis. Terlebih dahulu akan dikaji aljabar max-plus interval, yang merupakan perluasan aljabar max-plus, di mana elemen-elemenya berupa interval-interval. Hasil pembahasan ini akan digunakan sebagai dasar pembahasan aljabar max-plus bilangan kabur melalui potongan-α-nya yang berupa interval. Selanjutnya dengan memperhatikan struktur aljabar max-plus interval, akan dikonstruksikan dan diselidiki aljabar max-plus bilangan kabur.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembahasan aljabar max-plus ini didasarkan pada analisis idempoten interval dalam Litvinov, G.L., Sobolevskii, A.N. (2001)

Definisi 1 *Misalkan S adalah himpunan terurut parsial dengan relasi* $\preceq$. *Suatu* interval (*tertutup) dalam S adalah himpunan bagian S yang berbentuk* x = $[\underline{x}, \overline{x}] = \{x \in S \mid \underline{x} \preceq x \preceq \overline{x}\}$ dengan $\underline{x}$ dan $\overline{x} \in S$ berturut-turut disebut *batas bawah* dan *batas atas* interval $[\underline{x}, \overline{x}]$.

Misalkan x dan y adalah interval dalam *S*. Perhatikan bahwa interval x $\subseteq$ y jika dan hanya jika $\underline{y} \preceq \underline{x} \preceq \overline{x} \preceq \overline{y}$. Secara khusus x = y jika dan hanya jika $\underline{x} = \underline{y}$ dan $\overline{x} = \overline{y}$. Sebuah interval dengan x dengan $\underline{x} = \overline{x}$ merepresentasi suatu elemen dalam *S.*

Contoh 1 Telah diketahui bahwa $\mathbf{R}_{\max}$ merupakan himpunan terurut parsial dengan relasi $\preceq_m$. Interval dalam $\mathbf{R}_{\max}$ berbentuk x = $[\underline{x}, \overline{x}] = \{x \in \mathbf{R}_{\max} \mid \underline{x} \preceq_m x \preceq_m \overline{x}\}$. Bilangan $x \in \mathbf{R}_{\max}$ dapat dinyatakan dengan menggunakan interval $x = [x, x]$. Interval dalam $\mathbf{R}_{\max}$ misalnya [2, 3], [–4, 1], [0, 0] = 0, $[\varepsilon, \varepsilon] = \varepsilon$ dan sebagainya.

Diberikan (S, +, $\times$) adalah suatu semiring idempoten dan tidak memuat pembagi nol, dengan elemen netral *0*. Didefinisikan $\mathbf{I}(S)$ = { x = $[\underline{x}, \overline{x}] \mid \underline{x}, \overline{x} \in S$, $0 \prec \underline{x} \preceq \overline{x}\} \cup \{[0, 0]\}$.
Pada $\boldsymbol{I}(S)$ didefinisikan operasi $\overline{+}$ dan $\overline{\times}$ dengan x $\overline{+}$ y = $[\underline{x} + \underline{y},\ \overline{x} + \overline{y}]$ dan x $\overline{\times}$ y = $[\underline{x} \times \underline{y},\ \overline{x} \times \overline{y}]$, $\forall$x, y $\in \mathbf{I}(S)$. Dapat ditunjukkan bahwa operasi yang didefinisikan di atas terdefinisi dengan baik (*well defined*), yaitu memenuhi syarat tertutup dan bernilai tunggal.

Teorema 3 *Diberikan* (S, +, $\times$) *adalah suatu semiring idempoten dan tidak memuat pembagi nol, dengan elemen netral*

0. ($\mathbf{I}(S)$, $\overline{+}$, $\overline{\times}$) *merupakan semiring idempoten dengan elemen netral* 0_{I} = [*0*, *0*] *dan elemen satuan* 1_{I} = [*1*, *1*].

Bukti: Bahwa $\mathbf{I}(S)$ tertutup terhadap operasi $\overline{+}$ dan $\overline{\times}$ sudah dijelaskan pada penjelasan setelah pendefinisian operasi interval di atas. Selanjutnya karena operasi-operasi $\overline{+}$ dan $\overline{\times}$ pada ($\mathbf{I}(S)$,) didefinisikan komponen demi komponen dari S, maka sifat-sifat pada ($\mathbf{I}(S)$, $\overline{+}, \overline{\times}$) mengikuti seluruh sifat-sifat pada (S, $+,\times$) yang merupakan semiring idempoten, dengan elemen netral *0* dan elemen satuan *1*. Dengan demikian terbukti bahwa ($\mathbf{I}(S), \overline{+}, \overline{\times}$) merupakan semiring idempoten komutatif dengan elemen netral 0_{I} = [*0*, *0*] dan elemen satuan 1_{I} = [*1*, *1*]. ■

Contoh 2 Telah diketahui ($\mathbf{R}_\varepsilon$, $\oplus$, $\otimes$) merupakan semiring idempoten dan tidak memuat pembagi nol, dengan elemen netral ε. Didefinisikan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_\varepsilon = \{\mathrm{x} = [\underline{x}, \overline{x}] \mid \underline{x}, \overline{x} \in \mathbf{R}, \varepsilon \prec_m \underline{x} \preceq_m \overline{x}\} \cup \{[\varepsilon, \varepsilon]\}$.

Pada $\mathbf{I}(\mathbf{R})_\varepsilon$ didefinisikan operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ yaitu
$\mathrm{x} \overline{\oplus} \mathrm{y} = [\underline{x} \oplus \underline{y}, \ \overline{x} \oplus \overline{y}]$ dan $\mathrm{x} \overline{\otimes} \mathrm{y} = [\underline{x} \otimes \underline{y}, \ \overline{x} \otimes \overline{y}]$, $\forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_\varepsilon$. Misalnya $[-1, 1] \ \overline{\oplus} \ [1, 3] = [1, 3]$ dan $[-1, 1] \ \overline{\otimes} \ [1, 3] = [0, 4]$.

Menurut Teorema 3 di atas ($\mathbf{I}(\mathbf{R})_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes}$) merupakan semiring idempoten dengan elemen netral ε = [ε, ε] dan elemen satuan 0 = [0, 0]. Lebih lanjut karena ($\mathbf{R}_\varepsilon$, $\oplus$, $\otimes$) merupakan semiring idempoten komutatif, maka ($\mathbf{I}(\mathbf{R})_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes}$) merupakan semiring idempoten komutatif. Selanjutnya ($\mathbf{I}(\mathbf{R})_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes}$) disebut dengan *aljabar max-plus interval* yang cukup dituliskan dengan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$.

Teorema 4 $\forall$ x , y $\in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$ *berlaku bahwa*

i. $[\underline{x} \oplus \underline{y}, \overline{x} \oplus \overline{y}] = \mathrm{x} \oplus \mathrm{y}$ *dan*

ii. $[\underline{x} \otimes \underline{y}, \overline{x} \otimes \overline{y}] = \mathrm{x} \otimes \mathrm{y}$, *di mana* $\mathrm{x} \oplus \mathrm{y} = \{t \in \mathbf{R}_{\max} \mid t = x \oplus y, x \in \mathrm{x}, y \in \mathrm{y}\}$ *dan* $\mathrm{x} \otimes \mathrm{y} = \{t \in \mathbf{R}_{\max} \mid t = x \otimes y, x \in \mathrm{x}, y \in \mathrm{y}\}$.

Bukti:

i) Ambil sembarang $t \in \mathrm{x} \oplus \mathrm{y}$ dan misalkan $x \in \mathrm{x}$ dan $y \in \mathrm{y}$ sedemikian hingga $t = x \oplus y$. Karena x dan y adalah interval, maka $\underline{x} \preceq x \preceq \overline{x}$ dan $\underline{y} \preceq y \preceq \overline{y}$. Karena operasi $\oplus$ konsisten terhadap urutan $\preceq$, maka $\underline{x} \oplus \underline{y} \preceq x \oplus y \preceq \overline{x} \oplus \overline{y}$, sehingga $x \oplus y \in [\underline{x} \oplus \underline{y}, \overline{x} \oplus \overline{y}]$. Jadi $\mathrm{x} \oplus \mathrm{y} \subseteq [\underline{x} \oplus \underline{y}, \overline{x} \oplus \overline{y}]$.
Ambil sembarang $t \in [\underline{x} \oplus \underline{y}, \overline{x} \oplus \overline{y}]$, maka $\underline{x} \oplus \underline{y} \preceq t \preceq \overline{x} \oplus \overline{y}$. Andaikan $t \notin \mathrm{x} \oplus \mathrm{y}$, maka $\forall x \in \mathrm{x}$ dan $\forall y \in \mathrm{y}$ berlaku $t \neq x \oplus y$, karena urutan " $\preceq$" dalam $\mathbf{R}_{\max}$ merupakan urutan total, berarti bahwa $t \prec x \oplus y$ atau $t \succ x \oplus y$. Karena $\underline{x} \in \mathrm{x}$ dan $\underline{y} \in \mathrm{y}$ maka $t \prec \underline{x} \oplus \underline{y}$ atau $t \succ \underline{x} \oplus \underline{y}$, sehingga terjadi kontradiksi. Jadi $t \in \mathrm{x} \oplus \mathrm{y}$, yang berarti $[\underline{x} \oplus \underline{y}, \overline{x} \oplus \overline{y}] \subseteq \mathrm{x} \oplus \mathrm{y}$. Dengan demikan terbukti $[\underline{x} \oplus \underline{y}, \overline{x} \oplus \overline{y}] = \mathrm{x} \oplus \mathrm{y}$.

ii) Analog dengan pembuktian *i*) di atas. ■

Berikut diberikan teorema yang menunjuk-kan bahwa operasi maximum bilangan kabur dengan menggunakan prinsip perluasan dan dengan menggunakan potongan-α adalah ekivalen.

Teorema 5 *Diberikan dua buah bilangan kabur* $\tilde{a}$ *dan* $\tilde{b}$ *dengan potongan-α-nya berturut-turut adalah* $a^\alpha = [\underline{a^\alpha}, \overline{a^\alpha}]$ *dan* $b^\alpha = [\underline{b^\alpha}, \overline{b^\alpha}]$. *Maximum* $\tilde{a}$ *dan* $\tilde{b}$ *, yaitu* $\tilde{a} \oplus \tilde{b}$ *adalah himpunan kabur dengan* *fungsi keanggotaan* $\mu_{\tilde{a}\tilde{\oplus}\tilde{b}}(z) = \sup\limits_{z=x\oplus y} \min\{\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)\}$ *jika dan hanya jika* $(a \oplus b)^{\alpha} = [\underline{a^{\alpha}} \oplus \underline{b^{\alpha}}, \overline{a^{\alpha}} \oplus \overline{b^{\alpha}}]$.

Bukti: ($\Rightarrow$) Ambil sembarang bilangan real $z \in (a \oplus b)^{\alpha}$, maka $\mu_{(\tilde{a}\tilde{\otimes}\tilde{b})}(z) \geq \alpha$. Andaikan $z \notin [\underline{a^{\alpha}} \oplus \underline{b^{\alpha}}, \overline{a^{\alpha}} \oplus \overline{b^{\alpha}}]$, maka untuk setiap x dan y dengan $x \oplus y = z$ berlaku $x \notin [\underline{a^{\alpha}}, \overline{a^{\alpha}}]$ atau $y \notin [\underline{b^{\alpha}}, \overline{b^{\alpha}}]$. Hal ini berarti $\mu_{\tilde{a}}(x) < \alpha$ atau $\mu_{\tilde{b}}(y) < \alpha$ yang berakibat $\mu_{\tilde{a}\tilde{\oplus}\tilde{b}}(z) = \sup\limits_{z=x\oplus y} \min\{\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)\} < \alpha$, sehingga terjadi kontradiksi. Jadi $z \in [\underline{a^{\alpha}} \oplus \underline{b^{\alpha}}, \overline{a^{\alpha}} \oplus \overline{b^{\alpha}}]$, yang berarti $(a \oplus b)^{\alpha} \subseteq [\underline{a^{\alpha}} \oplus \underline{b^{\alpha}}, \overline{a^{\alpha}} \oplus \overline{b^{\alpha}}]$.

Ambil sembarang bilangan real $z \in [\underline{a^{\alpha}} \oplus \underline{b^{\alpha}}, \overline{a^{\alpha}} \oplus \overline{b^{\alpha}}]$. Karena menurut Teorema 4, $[\underline{a^{\alpha}} \oplus \underline{b^{\alpha}}, \overline{a^{\alpha}} \oplus \overline{b^{\alpha}}] = a^{\alpha} \oplus b^{\alpha} = \{z \in \mathbf{R}_{\max} \mid z = x \oplus y, x \in a^{\alpha}, y \in b^{\alpha}\}$ maka terdapat $x \in [\underline{a^{\alpha}}, \overline{a^{\alpha}}]$ dan $y \in [\underline{b^{\alpha}}, \overline{b^{\alpha}}]$ sedemikian sehingga $x + y = z$. Hal ini berarti bahwa $\mu_{\tilde{a}}(x) \geq \alpha$ dan $\mu_{\tilde{b}}(y) \geq \alpha$. Jadi $\mu_{\tilde{a}\tilde{\oplus}\tilde{b}}(z) = \sup\limits_{z=x\oplus y} \min\{\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)\} \geq \alpha$, yaitu bahwa $z \in (a \oplus b)^{\alpha}$, yang berarti $[\underline{a^{\alpha}} \oplus \underline{b^{\alpha}}, \overline{a^{\alpha}} \oplus \overline{b^{\alpha}}] \subseteq (a \oplus b)^{\alpha}$. Dengan demikian terbukti bahwa $(a \oplus b)^{\alpha} = [\underline{a^{\alpha}} \oplus \underline{b^{\alpha}}, \overline{a^{\alpha}} \oplus \overline{b^{\alpha}}]$.

($\Leftarrow$) Andaikan $(a \oplus b)^{\alpha} = [\underline{a^{\alpha}} \oplus \underline{b^{\alpha}}, \overline{a^{\alpha}} \oplus \overline{b^{\alpha}}]$. Menurut Teorema 1, $[\underline{a^{\alpha}} \oplus \underline{b^{\alpha}}, \overline{a^{\alpha}} \oplus \overline{b^{\alpha}}] = a^{\alpha} \oplus b^{\alpha} = \{z \in \mathbf{R}_{\max} \mid z = x \oplus y, x \in a^{\alpha}, y \in b^{\alpha}\}$. Perhatikan bahwa a^{α} dan b^{α} dapat dipandang sebagai himpunan kabur dengan fungsi keanggotaannya berturut-turut adalah fungsi karakteristik $\chi_{a^{\alpha}}$ dan $\chi_{b^{\alpha}}$. Kemudian menurut prinsip perluasan diperoleh $\chi_{a^{\alpha}\oplus b^{\alpha}}(z) = \sup\limits_{z=x\oplus y} \min\{\chi_{a^{\alpha}}(x), \chi_{b^{\alpha}}(y)\}$. Misalkan $\tilde{a} \tilde{\oplus} \tilde{b} = \tilde{c}$, maka $(a \oplus b)^{\alpha} = c^{\alpha}$.
Selanjutnya menurut Teorema Dekomposisi diperoleh $\mu_{\tilde{c}}(z) = \mu_{\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}\tilde{c}^{\alpha}}(z) = \max\limits_{x\in[0,1]} \mu_{\tilde{c}^{\alpha}}(z)$ dengan $\tilde{c}^{\alpha}$, adalah himpunan kabur dalam $\mathbf{R}$ dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{c}^{\alpha}}(z) = \alpha\chi_{(a\oplus b)^{\alpha}}(z)$. Karena $(a \oplus b)^{\alpha} = a^{\alpha} \oplus b^{\alpha}$, maka
$\mu_{\tilde{c}^{\alpha}}(z) = \alpha \sup\limits_{z=x\oplus y} \min\{\chi_{\tilde{a}}(x), \chi_{\tilde{b}}(y)\}(z) = \sup\limits_{z=x\oplus y} \min\{\alpha\chi_{\tilde{a}}(x), \alpha\chi_{\tilde{b}}(y)\}(z) = \sup\limits_{z=x\oplus y} \min\{\mu_{\tilde{a}^{\alpha}}(x), \mu_{\tilde{b}^{\alpha}}(y)\}$. Sehingga $\mu_{\tilde{c}}(z) = \max\limits_{x\in[0,1]} \sup\limits_{z=x\oplus y} \min\{\mu_{\tilde{a}^{\alpha}}(x), \mu_{\tilde{b}^{\alpha}}(y)\} = \sup\limits_{z=x\oplus y} \min\{\max\limits_{x\in[0,1]} \mu_{\tilde{a}^{\alpha}}(x), \max\limits_{x\in[0,1]} \mu_{\tilde{b}^{\alpha}}(y)\} = \sup\limits_{z=x\oplus y} \min\{\mu_{\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}\tilde{a}^{\alpha}}(x), \mu_{\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}\tilde{b}^{\alpha}}(y)\}$. Jadi diperoleh bahwa $\mu_{\tilde{a}\tilde{\oplus}\tilde{b}}(z) = \sup\limits_{z=x\oplus y} \min\{\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)\}$. ■

Teorema di atas juga berlaku untuk operasi penjumlahan, dengan bukti yang analog. Dalam pembahasan selanjutnya, operasi maximum dan penjumlahan bilangan kabur akan didefinisikan melalui potongan-α-nya.

Teorema 6 *Untuk bilangan kabur* $\tilde{a}$ *dan* $\tilde{b}$ *berlaku* $pend(\tilde{a} \tilde{\otimes} \tilde{b}) = pend(\tilde{a}) \otimes pend(\tilde{b})$ *di mana* $pend(\tilde{a}) \otimes pend(\tilde{b}) = \{x \otimes y \mid x \in pend(\tilde{a})$ *dan* $y \in pend(\tilde{b})\}$.
Bukti: Ambil sembarang bilangan real $z \in pend(\tilde{a} \tilde{\otimes} \tilde{b})$, maka $\mu_{\tilde{a}\tilde{\oplus}\tilde{b}}(z) > 0$.

Andaikan $z \notin pend(\tilde{a}) \otimes pend(\tilde{b})$, maka untuk setiap x dan y dengan $x \otimes y = z$ berlaku $x \notin pend(\tilde{a})$ atau $y \notin pend(\tilde{b})$. Hal ini berarti $\mu_{\tilde{a}}(x) \leq 0$ atau $\mu_{\tilde{b}}(y) \leq 0$ yang berakibat $\mu_{\tilde{a}\tilde{\otimes}\tilde{b})}(z) =$

$\sup\limits_{z=x\otimes y} \min\{\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)\} \le 0$, sehingga terjadi kontradiksi. Jadi $z \in pend(\tilde{a}) \otimes pend(\tilde{b})$, yang berarti $pend(\tilde{a} \tilde{\otimes} \tilde{b}) \subseteq pend(\tilde{a}) \otimes pend(\tilde{b})$.

Ambil sembarang bilangan real $z \in pend(\tilde{a}) \otimes end(\tilde{b})$, maka terdapat $x \in pend(\tilde{a})$ dan $y \in pend(\tilde{b})$ sedemikian sehingga $x + y = z$. Hal ini berarti bahwa $\mu_{\tilde{a}}(x) > 0$ dan $\mu_{\tilde{b}}(y) > 0$. Akibatnya $\mu_{\tilde{a}\tilde{\otimes}\tilde{b})}(z) = \sup\limits_{z=x\otimes y} \min\{\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)\} > 0$, yaitu bahwa $z \in pend(\tilde{a}) \otimes pend(\tilde{b})$. Jadi $pend(\tilde{a}) \otimes pend(\tilde{b}) \subseteq pend(\tilde{a} \tilde{\otimes} \tilde{b})$. Dengan demikian terbukti bahwa $pend(\tilde{a} \tilde{\otimes} \tilde{b}) = pend(\tilde{a}) \otimes pend(\tilde{b})$. ■

Teorema di atas juga berlaku untuk operasi maksimum, dengan bukti yang analog. Selanjutnya diperoleh bahwa $(a \otimes b)^0 = [\inf(pend\,(\tilde{a} \tilde{\otimes} \tilde{b})), \sup(pend\,(\tilde{a} \tilde{\otimes} \tilde{b}))] = [\inf(pend(\tilde{a}) \otimes pend(\tilde{b})), \sup(pend(\tilde{a}) \otimes pend(\tilde{b}))] = [\inf(pend(\tilde{a})) \otimes \inf(pend(\tilde{b})), \sup(pend(\tilde{a}))\otimes\sup(pend(\tilde{b}))] = [\inf(pend(\tilde{a})), \sup(pend(\tilde{a}))]\, \overline{\otimes}\, [\inf(pend(\tilde{b})), \sup(pend(\tilde{b}))] = a^0 \,\overline{\otimes}\, b^0$. Dengan cara yang analog dapat juga diperoleh bahwa $(a \oplus b)^0 = a^0 \,\overline{\oplus}\, b^0$.

Suatu keluarga interval $[a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ dikatakan *tersarang (nested)* jika untuk $\alpha \le \beta$ maka berlaku $[a_1(\alpha), a_2(\alpha)] \supseteq [a_1(\beta), a_2(\beta)]$, $\forall \alpha, \beta \in [0, 1]$. Berikut diberikan suatu hasil yang memberikan syarat bahwa suatu keluarga interval merupakan potongan-α suatu bilangan kabur.

Akibat 7 *Jika keluarga interval* $\{[a_1(\alpha), a_2(\alpha)]\}$ $\forall \alpha \in [0, 1]$ *memenuhi sifat*

i) $[a_1(1), a_2(1)] \ne \emptyset$,

ii) $[a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ *tersarang dan*

iii) $[a_1(0), a_2(0)]$ *terbatas,*

maka terdapat dengan tunggal bilangan kabur $\tilde{a}$ *sedemikian hingga* $[a_1(\alpha), a_2(\alpha)] = a^\alpha$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Bukti: Dari sifat *ii)* di atas, menurut Teorema 2 jelas bahwa terdapat dengan tunggal himpunan kabur $\tilde{a}$ sedemikian hingga $[a_1(\alpha), a_2(\alpha)] = a^\alpha$, $\forall \alpha \in [0, 1]$. Selanjutnya dari sifat *i)* dan *iii)* di atas, menurut definisi bilangan kabur, jelas bahwa $\tilde{a}$ merupakan bilangan kabur. ■

Untuk memperoleh fungsi keanggotaan hasil operasi pada bilangan kabur seperti di atas, dapat dengan menggunakan Teorema Dekomposisi. Potongan-potongan-α yang didefinisikan pada operasi di atas memenuhi syarat sebagai keluarga potongan-α dari suatu bilangan kabur, yaitu

i) Potongan-potongan-α hasil operasi di atas berupa interval dalam $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{max}$. Hal ini dipenuhi, karena $\underline{a}^\alpha \preceq_m \overline{a}^\alpha$ dan $\underline{b}^\alpha \preceq_m \overline{b}^\alpha$, maka menurut sifat kekonsistenan urutan "$\preceq_m$" terhadap operasi $\oplus$ dan $\otimes$ dapat disimpulkan $(\underline{a}^\alpha \oplus \underline{b}^\alpha) \preceq_m (\overline{a}^\alpha \oplus \overline{b}^\alpha)$ dan $(\underline{a}^\alpha \otimes \underline{b}^\alpha) \preceq_m (\overline{a}^\alpha \otimes \overline{b}^\alpha)$.

ii) Karena $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$ adalah bilangan kabur, maka $[\underline{a}^1, \overline{a}^1] \ne \emptyset$ dan $[\underline{b}^1, \overline{b}^1] \ne \emptyset$ sehingga $[\underline{a}^1 \oplus \underline{b}^1, \overline{a}^1 \oplus \overline{b}^1] \ne \emptyset$.

iii) Potongan-potongan-α hasil operasi di atas berupa keluarga interval tersarang dalam $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{max}$. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut. Karena $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$ merupakan bilangan kabur, maka berlaku: jika $\alpha \le \beta$ maka $a^\beta \subseteq a^\alpha$ dan $b^\beta \subseteq b^\alpha$, yaitu $\underline{a}^\alpha \preceq_m \underline{a}^\beta \preceq_m \overline{a}^\beta \preceq_m \overline{a}^\alpha$ dan $\underline{b}^\alpha \preceq_m \underline{b}^\beta \preceq_m \overline{b}^\beta \preceq_m \overline{b}^\beta$. Karena dalam $\mathbf{R}_{max}$ operasi $\oplus$ dan $\otimes$ konsisten terhadap urutan "$\preceq_m$", maka $\underline{a}^{\alpha} \oplus \underline{b}^{\alpha} \preceq_{m} \underline{a}^{\beta} \oplus \overline{b^{\beta}} \preceq_{m} \overline{a^{\beta}} \oplus \overline{b^{\beta}} \preceq_{m} \overline{a^{\alpha}} \oplus \overline{b^{\alpha}}$ dan $\underline{a}^{\alpha} \otimes \underline{b}^{\alpha} \preceq_{m} \underline{a}^{\beta} \otimes \underline{b}^{\beta} \preceq_{m} \overline{a^{\beta}} \otimes \overline{b^{\beta}} \preceq_{m} \overline{a^{\alpha}} \otimes \overline{b^{\alpha}}$, $\forall \alpha, \beta \in [0, 1]$.

iv) Karena $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$ adalah bilangan kabur, maka maka $[\underline{a}^{0}, \overline{a^{0}}]$ dan $[\underline{b}^{0}, \overline{b^{0}}]$ masing-masing terbatas, sehingga $[\underline{a}^{0} \oplus \underline{b}^{0}, \overline{a^{0}} \oplus \overline{b^{0}}]$ juga terbatas.

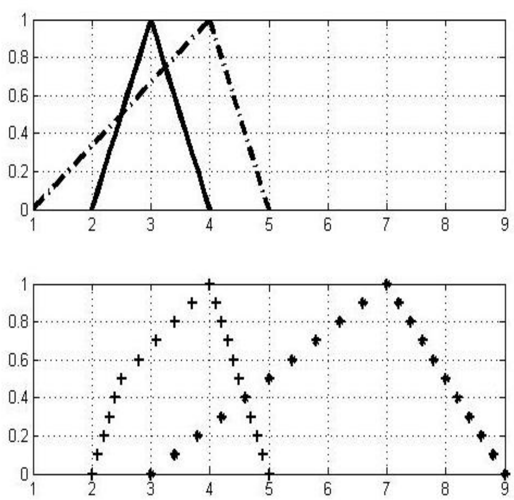
Selanjutnya dengan menggunakan Teorema Dekomposisi diperoleh bahwa $\tilde{a} \,\tilde{\oplus}\, \tilde{b} = \tilde{c} = \bigcup\limits_{\alpha \in [0,1]} \tilde{c}^{\alpha}$, di mana $\tilde{c}^{\alpha}$ adalah himpunan kabur dalam **R** dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{c}^{\alpha}}(x) = \alpha\, \chi_{(a \oplus b)^{\alpha}}(x)$, di mana $\chi_{(a \oplus b)^{\alpha}}$ adalah fungsi karakteristik himpunan $(a \oplus b)^{\alpha}$. Demikian juga untuk operasi $\tilde{\otimes}$ dapat dilakukan dengan cara yang analog.

Contoh 3 Diberikan dua buah bilangan kabur segitiga $\tilde{a}$ = BKS(a_1, a, a_2) dan $\tilde{b}$ =BKS(b_1, b, b_2), maka $a^{\alpha} = [\underline{a}^{\alpha}, \overline{a}^{\alpha}] = [(a - a_1)\alpha + a_1, -(a_2 - a)\alpha + a_2]$ dan $b^{\alpha} = [\underline{b}^{\alpha}, \overline{b}^{\alpha}] = [(b - b_1)\alpha + b_1, -(b_2 - b)\alpha + b_2]$.

Kemudian potongan-α dari $\tilde{a} \,\tilde{\oplus}\, \tilde{b}$ dan $\tilde{a} \,\tilde{\otimes}\, \tilde{b}$ berturut-turut adalah $[((a - a_1)\alpha + a_1) \oplus ((b - b_1)\alpha + b_1), (-(a_2 - a)\alpha + a_2) \oplus (-(b_2 - b)\alpha + b_2)]$ dan $[((a - a_1)\alpha + a_1) \otimes ((b - b_1)\alpha + b_1), (-(a_2 - a)\alpha + a_2) \otimes (-(b_2 - b)\alpha + b_2)]$. Perhatikan bahwa untuk potongan-α dari $\tilde{a} \,\tilde{\otimes}\, \tilde{b}$ berlaku $[((a - a_1)\alpha + a_1) \otimes ((b - b_1)\alpha + b_1), (-(a_2 - a)\alpha + a_2) \otimes (-(b_2 - b)\alpha + b_2)] = [(a+b) - (a_1+b_1)\alpha + (a_1+b_1), -((a_2+b_2) - (a+b)\alpha + (a_2+b_2)]$, sehingga $\tilde{a} \,\tilde{\otimes}\, \tilde{b}$ = BKS((a_1+b_1), ($a+b$), ($a_2 + b_2$)).

Sedangkan untuk $(a \,\tilde{\oplus}\, b))^{\alpha}$, jika $\underline{a}^{\alpha} \preceq_{m} \underline{b}^{\alpha}$ dan $\overline{a^{\alpha}} \preceq_{m} \overline{b^{\alpha}}$, maka $(a \,\tilde{\oplus}\, b))^{\alpha} = b^{\alpha}$, yaitu $\tilde{a} \,\tilde{\oplus}\, \tilde{b} = \tilde{b}$. Salah satu kemungkinan yang lain dari relasi antara $\underline{a}^{\alpha}, \underline{b}^{\alpha}, \overline{a^{\alpha}}, \overline{b^{\alpha}}$ diberikan dalam Contoh 4 berikut.

Contoh 4 Misalkan $\tilde{a}$ = BKS(2,3, 4) dan $\tilde{b}$ = BKS(1,4,5), maka $a^{\alpha} = [(3-2)\alpha + 2, -(4-3)\alpha + 4] = [\alpha+2, -\alpha+4]$ dan $b^{\alpha} = [(4-1)\alpha + 1, -(5-4)\alpha + 5] = [3\alpha+1, -\alpha+5]$. Dengan menggunakan program MATLAB berikut diberikan grafik fungsi keanggotaan dari $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ (Gambar 1 bagian atas) dan batas-batas potongan-α dari $\tilde{a} \,\tilde{\oplus}\, \tilde{b}$ dan $\tilde{a} \,\tilde{\otimes}\, \tilde{b}$ untuk α = 0, 0.1, 0.2, ..., 1 (Gambar 1 bagian bawah).



Gambar 1. Grafik Fungsi Keanggotaan Hasil Operasi BKS(2, 3, 4) dan BKS(1, 4, 5).

Keterangan Gambar 1 : — : $\tilde{a}$, —.— : $\tilde{b}$, + : $\tilde{a} \,\tilde{\oplus}\, \tilde{b}$, * : $\tilde{a} \,\tilde{\otimes}\, \tilde{b}$.

Dengan memperhatikan gambar di atas dan bahwa titik potong $\mu_{\tilde{a}}(x) = x - 2$ dan $\mu_{\tilde{b}}(x) = \frac{x-1}{3}$ adalah (2.5, 0.5), maka diperoleh

$$\mu_{\tilde{a}\tilde{\oplus}\tilde{b}}(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 2 \\ x-2 & , \ 2 \le x \le 2{,}5 \\ \dfrac{x-1}{3} & , \ 2{,}5 < x \le 4 \\ 5-x & , \ 4 < x \le 5 \\ 0 & , \ x > 5 \end{cases} .$$

Sementara itu $\tilde{a}\ \tilde{\otimes}\ \tilde{b}$ = BKS(3, 7, 9).

Dari Contoh 4 di atas nampak bahwa hasil operasi maximum dua buah bilangan kabur segitiga tidak selalu merupakan bilangan kabur segitiga.

Diberikan $\mathbf{F}(\mathbf{R})_{\tilde{\varepsilon}} := \mathbf{F}(\mathbf{R}) \cup \{\tilde{\varepsilon}\}$ dengan $\mathbf{F}(\mathbf{R})$ adalah himpunan semua bilangan kabur dan $\tilde{\varepsilon} := \{-\infty\}$, dengan $\varepsilon^{\alpha} = [-\infty,-\infty]$, $\forall\ \alpha \in [0, 1]$. Pada $(\mathbf{F}(\mathbf{R}))_{\tilde{\varepsilon}}$ didefinisikan operasi maksimum $\tilde{\oplus}$ dan penjumlahan $\tilde{\otimes}$, seperti pada bagian 2.2. di atas.

Teorema 8 *Struktur aljabar* $(\mathbf{F}(\mathbf{R})_{\tilde{\varepsilon}}\ ,\ \tilde{\oplus},\ \tilde{\otimes})$ *adalah semiring idempoten komutatif.*

Bukti: Operasi yang didefinisikan di atas terdefinisi dengan baik, yaitu memenuhi syarat tertutup dan bernilai tunggal. Akan ditunjukkan untuk operasi $\tilde{\oplus}$, sedangkan untuk operasi $\tilde{\otimes}$ dapat dilakukan dengan cara yang analog. Untuk syarat ketertutupan dijelaskan sebagai berikut. Ambil sembarang bilangan kabur $\tilde{a}$ dan $\tilde{b} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\tilde{\varepsilon}}$.

i) Karena $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$ merupakan bilangan kabur, maka $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$ normal, yaitu bahwa $a^1 \neq \emptyset$ dan $b^1 \neq \emptyset$. Hal ini berarti $\exists\ x_a, x_b \in \mathbf{R}$ sedemikian hingga berlaku $\underline{a^1} \le x_a \le \underline{a^1}$ dan $\underline{b^1} \le x_b \le \overline{b^1}$. Karena sifat kekonsistenan urutan "$\preceq_{\mathrm{m}}$" terhadap operasi $\oplus$ maka berlaku $(\underline{a^1} \oplus \underline{b^1}) \preceq_{\mathrm{m}} (x_a \oplus x_b) \preceq_{\mathrm{m}} (\overline{a^1} \oplus \overline{b^1})$. Jadi $[\underline{a^1} \oplus \underline{b^1},\ \overline{a^1} \oplus \overline{b^1}] = (a \oplus b)^1 \neq \emptyset$. Jadi $\tilde{a}\ \tilde{\oplus}\ \tilde{b}$ normal.

ii) Karena $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$ merupakan bilangan kabur, maka $\forall \alpha \in (0, 1]$, a^{α} , b^{α} merupakan interval tertutup dalam **R**. Menurut sifat ketertutupan operasi pada interval, $[\underline{a^{\alpha}} \oplus \underline{b^{\alpha}},\ \overline{a^{\alpha}} \oplus \overline{b^{\alpha}}]$ merupakan interval tertutup dalam **R** , $\forall \alpha \in (0, 1]$.

iii) Karena $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$ merupakan bilangan kabur, maka *pend*($\tilde{a}$) dan *pend*($\tilde{b}$) terbatas, sehingga berlaku *pend*($\tilde{a}$) $\subseteq a^0$ = [inf(*pend*($\tilde{a}$)), sup(*pend*($\tilde{a}$))] dan *pend*($\tilde{b}$) $\subseteq b^0$ = [inf(*pend*($\tilde{b}$)), sup(*pend*($\tilde{b}$))]. Dengan demikian menurut penjelasan pada bagian 2.2 di atas, *pend*($\tilde{a}\ \tilde{\oplus}\ \tilde{b}$) = *pend*($\tilde{a}$) $\oplus$ *pend*($\tilde{b}$) $\subseteq a^0\ \overline{\oplus}\ b^0 = (a \oplus b)^0$ = [inf(*pend*($\tilde{a}$))$\otimes$ inf(*pend*($\tilde{b}$)), sup(*pend*($\tilde{a}$)) $\otimes$sup(*pend*($\tilde{b}$))]. Jadi terbukti bahwa *pend*($\tilde{a}\ \tilde{\oplus}\ \tilde{b}$) terbatas.

Berdasarkan *i)* , *ii)* dan *iii)* di atas dapat disimpulkan bahwa operasi $\tilde{\oplus}$ yang didefinisikan di atas tertutup dalam $\mathbf{F}(\mathbf{R})_{\varepsilon}$. Ketunggalan hasil operasi di atas dapat dijelaskan sebagai berikut. Akan ditunjukkan ketunggalan untuk operasi $\tilde{\otimes}$, sedangkan untuk operasi $\tilde{\oplus}$ analog. Ambil sembarang bilangan kabur $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ dan $\tilde{d} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\varepsilon}$ sedemikian hingga $\tilde{a} = \tilde{c}$ dan $\tilde{b} = \tilde{d}$. Karena $\tilde{a} = \tilde{c}$ dan $\tilde{b} = \tilde{d}$, maka $a^{\alpha} = c^{\alpha}$ dan $b^{\alpha} = d^{\alpha}$, $\forall \alpha \in [0, 1]$ yang berarti $[\underline{a^{\alpha}}, \overline{a^{\alpha}}] = [\underline{c^{\alpha}}, \overline{c^{\alpha}}]$ dan $[\underline{b^{\alpha}}, \overline{b^{\alpha}}] = [\underline{d^{\alpha}}, \overline{d^{\alpha}}]$ atau $\underline{a^{\alpha}} = \underline{c^{\alpha}}$, $\overline{a^{\alpha}} = \overline{c^{\alpha}}$, $\underline{b^{\alpha}} = \underline{d^{\alpha}}$, $\overline{b^{\alpha}} = \overline{d^{\alpha}}$. Hal ini berakibat bahwa $\underline{a^{\alpha}} \otimes \underline{b^{\alpha}} = \underline{c^{\alpha}} \otimes \underline{d^{\alpha}}$ dan $\overline{a^{\alpha}} \otimes \overline{b^{\alpha}} = \overline{c^{\alpha}} \otimes \overline{d^{\alpha}}$ yaitu bahwa $[\underline{a^{\alpha}} \otimes \underline{b^{\alpha}},\ \overline{a^{\alpha}} \otimes \overline{b^{\alpha}}] = [\underline{c^{\alpha}} \otimes \underline{d^{\alpha}},\ \overline{c^{\alpha}} \otimes \overline{d^{\alpha}}]$, $\forall \alpha \in [0, 1]$. Jadi

$\tilde{a} \mathbin{\tilde{\otimes}} \tilde{b} = \tilde{c} \mathbin{\tilde{\otimes}} \tilde{d}$, yang berarti hasil operasi tersebut tunggal.
Selanjutnya karena potongan-α suatu bilangan kabur berupa interval dalam $\mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon)$, dan menurut Contoh 2, $(\mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon), \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten komutatif, maka $(\mathbf{F}(\mathbf{R})_{\tilde{\varepsilon}}, \tilde{\oplus}, \tilde{\otimes})$ merupakan semiring idempoten komutatif, dengan elemen netral $\tilde{\varepsilon} = \{-\infty\}$ dan elemen satuan $\tilde{e} = \{0\}$, dengan $e^\alpha = [0, 0]$, $\forall\ \alpha \in [0, 1]$). ■

Semiring idempoten komutatif $\mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max} := (\mathbf{F}(\mathbf{R})_\varepsilon, \tilde{\oplus}, \tilde{\otimes})$ di atas disebut *aljabar max-plus bilangan kabur*, atau secara singkat cukup dituliskan dengan $\mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}$.

5. KESIMPULAN DAN SARAN

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa operasi maximum dan penjumlahan yang didefinisikan melalui potongan-α tertutup dalam himpunan semua bilangan kabur tersebut. Selanjutnya himpunan semua bilangan kabur yang dilengkapi dengan operasi maximum dan penjumlahan tersebut merupakan semiring idempoten komutatif.

Untuk penelitian selanjutnya dapat dilakukan pembahasan perluasan operasi-operasi di atas ke dalam operasi maximum dan penjumlahan untuk matriks atas bilangan kabur beserta struktur-struktur aljabar yang menyertainya.

DAFTAR PUSTAKA

Bacelli, F., *et al*. 2001. *Synchronization and Linearity*. John Wiley & Sons. New York.

Lee, K.H. 2005. *First Course on Fuzzy Theory and Applications*. Spinger-Verlag. Berlin.

Litvinov, G.L., Sobolevskii, A.N. 2001. Idempotent Interval Anaysis and Optimization Problems. *Reliab. Comput.*, 7, 353 – 377 (2001); arXiv: math.SC/ 010180.

Rudhito, Andy. 2003. *Sistem Linear Max-Plus Waktu-Invariant*. Tesis: Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.

Schutter, B. De., 1996, Max-Algebraic System Theory for Discrete Event Systems, PhD thesis Departement of Electrical Enginering Katholieke Universiteit Leuven, Leuven.

Susilo, F. 2006. *Himpunan dan Logika Kabur serta Aplikasinya. Edisi kedua.* Graha Ilmu. Yogyakarta.

Zimmermann, H.J., 1991. *Fuzzy Set Theory and Its Applications.* Kluwer Academic Publishers. Boston.