

ARTIKEL RISET

Analisis Potensial Gravitasi Disebabkan oleh Bodi Menyerupai Bola

Ari Setiawan

Received: 10 Jan., 2020 | Accepted: 11 Feb., 2020 | Published: 17 Aug., 2020 | DOI: 10.22146/jfi.v24i2.53340

Ringkasan

Ada perbedaan dalam menentukan bentuk *spheroid* referensi. Perataan bumi sudah ditemukan dan diukur pada akhir abad ke-18. Terlihat bahwa jarak antara derajat garis lintang yang diukur, misalnya dengan *sextant*, berbeda dari yang diharapkan dari bola. Pada 1743, *Clairaut* menunjukkan bahwa spheroid referensi juga dapat dihitung langsung dari medan gravitasi yang diukur \mathbf{g} . Penurunannya didasarkan pada perhitungan potensial U pada titik P karena bentuk benda hampir bulat, dan hanya berlaku untuk titik di luar atau dalam batas pada permukaan benda. Bagaimana pengukuran gravitasi yang digunakan untuk menentukan spheroid referensi dikenal sebagai rumus *MacCullagh*. Penyelesaian perhitungan potensial dapat diselesaikan dengan Persamaan *Laplace* $\Delta^2 U = 0$, dalam koordinat bola. Bidang potensial di luar sumber memenuhi Persamaan *Laplace*, solusinya berikut: $U(r, \theta, \varphi) = R(r)O(\theta)Q(\varphi)$. Solusi generik untuk U didapat dengan menggabungkan perilaku radial, longitudinal dan latitudinal pada persamaan yang dikenal dengan harmonik bola solid derajat l dan orde m . Dalam penelitian telah divisualisasikan perilaku harmonik bola berdasarkan nilai l dan m untuk mengidentifikasi tiga jenis harmonik yaitu harmonik *zonal*, *sektoral*, dan *tesseral*, dan visualisasi gravitasi di dalam dan diluar lembaran tipis massa sebuah bola.

Kata Kunci : Potensial; Persamaan Laplace; harmonik

Abstract

There are differences in determining the shape of the reference spheroid. Earth's flattening was discovered and measured at the end of the 18th century. It appears that the distance between the degrees of latitude measured, for example by sextant, different from what is expected from the spheroid. In 1743, Clairaut showed that the reference spheroid could also be calculated directly from the measured gravitational field \mathbf{g} . The derivation is based on the calculation of the potential U at point P because the shape of the object is almost spheroid, and only applies to points outside or within the boundary on the surface of the object. How the gravity measurements are used to determine the reference spheroid is known as the MacCullagh formula. Completion of the potential calculation can be completed with the Laplace Equation $\delta^2 U = 0$, in spherical coordinates. The potential field outside the source satisfies the Laplace equation, the following solution: $U(r, \theta, \varphi) = R(r)P(\theta)Q(\varphi)$. A generic solution for U is obtained by combining radial, longitudinal and latitudinal behavior in an equation known as the spherical harmonic degree l and order m . In this research visualized the harmonic behavior of the spherical based on the values of l and m to identify three types of harmonics, namely zonal, sectoral and tesseral harmonics, and visualization of gravity inside and outside the thin sheet of mass of a sphere.

Keywords: Potential; Laplace equation; harmonics

Correspondence: ari.setiawan@ugm.ac.id

Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan, Universitas Gadjah Mada, Sekip Utara, Bulaksumur, Sinduadi, Mlati, Kota Yogyakarta, Daerah Istimewa Yogyakarta, Indonesia

Full list of author information is available at the end of the article

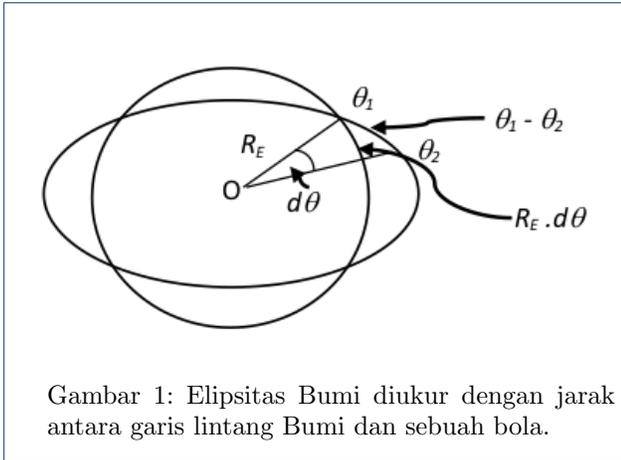
*Equal contributor

PENDAHULUAN

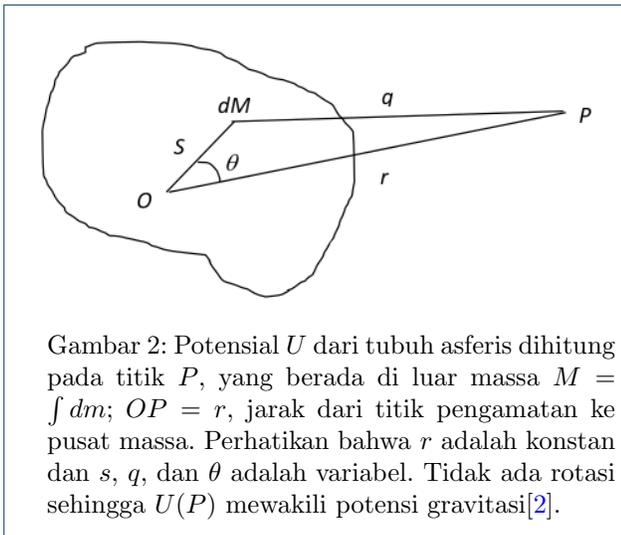
Latar Belakang

Untuk menentukan bentuk spheroid referensi, perataan bumi sudah ditemukan dan diukur pada akhir abad ke-18. Terlihat bahwa jarak antara derajat garis lintang yang diukur, misalnya dengan sextant, berbeda dari yang diharapkan yaitu berupa

bola. Seperti ditunjukkan dalam gambar 1 bahwa $R_E(\theta_1 - \theta_2 \neq R_E \cdot d\theta)$, R_E radius bumi, θ_1 dan θ_2 dua garis lintang yang berbeda [1].



Pada 1743, Clairaut menunjukkan bahwa *spheroid* referensi juga dapat dihitung langsung dari medan gravitasi yang diukur g . Penurunannya berdasarkan pada perhitungan potensial $U(P)$ pada titik P yang menyerupai benda bulat, dan hanya berlaku untuk titik di luar (atau, dalam batas, pada permukaan) benda, ditunjukkan pada gambar 2. Dengan menggunakan rumus cosinus (gambar 2) dapat



dituliskan :

$$q^2 = r^2 + s^2 - 2rs \cos \theta \tag{1}$$

sehingga,

$$dU = \frac{-G}{r \left[1 + \left(\frac{s}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{s}{r}\right) \cos \theta \right]^{\frac{1}{2}}} = \tag{2}$$

dengan menggunakan Teorema Binomial diperoleh:

$$\begin{aligned} U(P) &= \int_V dU \\ &= -\frac{G}{r} \int \left[1 + \left(\frac{s}{r}\right) \cos \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{r}\right)^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \right] dM \\ &= -\frac{G}{r} \int dM - \frac{G}{r^2} \int s \cos \theta dM \\ &\quad - \frac{G}{2r^3} \int s^2 (3 \cos^2 \theta - 1) dM \end{aligned} \tag{3}$$

dengan menggunakan identitas $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$:

$$\begin{aligned} U(P) &= -\frac{G}{r} \int dM - \frac{G}{r^2} \int s \cos \theta dM \\ &\quad - \frac{G}{r^3} \int s^2 \cos^2 \theta dM + \frac{3}{2} \frac{G}{r^3} \int s^2 \sin^2 \theta dM \end{aligned} \tag{4}$$

Persamaan 4 dapat dituliskan sebagai

$$U(P) = -\frac{GM}{r} - \frac{G}{2r^3} (A + B + C - 3I) \tag{5}$$

yang dikenal sebagai rumus *MacCullagh*.

Spherical harmonics

Lebih lanjut dilakukan penyelesaian persamaan *Laplace* $\delta^2 U = 0$ [3] dalam koordinat bola. Persamaan *Laplace* berlaku pada bidang potensial di luar sumber bidang. Penyelesaian dituliskan dalam bentuk struktur berikut: $U(r, \theta, \varphi) = R(r)P(\theta)Q(\varphi)$ [4]. Solusi umum untuk U didapat dengan menggabungkan perilaku radial, longitudinal dan latitudinal sebagai berikut:

$$\begin{aligned} U(r, \theta, \varphi) &= \left\{ \left(\frac{1}{r}\right)^{r_{i+1}} \right\} [A_l^m \cos m\varphi \\ &\quad + B_l^m \sin m\varphi] P_l^m(\cos \theta) \end{aligned} \tag{6}$$

Visualisasi perilaku harmonik bola adalah hal yang penting. Beberapa terminologi yang perlu diingat adalah bahwa berdasarkan nilai-nilai dari l dan m untuk mengidentifikasi tiga jenis harmonik:

- Harmonik zonal didefinisikan sebagai bentuk $P_l^0(\cos \theta) = P_l(\cos \theta)$. Superposisi polinomial *Legendre* ini menggambarkan variasi berdasarkan garis lintang, tidak tergantung pada garis bujur. Harmonik zonal akan mengecil di l lingkaran kecil pada globe, membagi bola ke zona latitudinal.
- Harmonik sektoral dalam bentuk $\sin(m\varphi)P_l^m(\cos \theta)$ atau $\cos(m\varphi)P_l^m(\cos \theta)$. Akan mengecil pada $2m$ meridian (garis longitudinal, jadi m lingkaran besar), akan membagi bola ke dalam sektor-sektor.

- Harmonik tesseral adalah yang berbentuk $\sin(m\varphi)P_l^m(\cos\theta)$ atau $\cos(m\varphi)P_l^m(\cos\theta)$ untuk $l \neq m$. Amplitudo harmonik bola permukaan dengan derajat l dan orde m tertentu akan mengecil pada $2m$ meridian garis bujur dan pada $(l - m)$ paralel garis lintang.

Solusi lengkap untuk persamaan *Laplace* diberikan dalam persamaan:

$$U(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left\{ \left(\frac{1}{r} \right)^{r_{l+1}} \right\} [A_l^m \cos m\varphi + B_l^m \sin m\varphi] P_l^m(\cos\theta) \quad (7)$$

Fungsi radial untuk bagian dalam distribusi massa, digunakan

$$U_{in}(r, \theta, \varphi) = r^l [A_l^m \cos m\varphi + B_l^m \sin m\varphi] P_l^m(\cos\theta) \quad (8)$$

dan untuk bagian luar

$$U_{out}(r, \theta, \varphi) = \left\{ \frac{1}{r^{l+1}} \right\} [A_l^m \cos m\varphi + B_l^m \sin m\varphi] P_l^m(\cos\theta)$$

dengan menambahkan faktor normalisasi dengan radius a di khatulistiwa:

$$U_{out}(r, \theta, \varphi) = -\frac{GM}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left\{ \left(\frac{1}{r} \right)^{r_{l+1}} \right\} \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} [A_l^m \cos m\varphi + B_l^m \sin m\varphi] P_l^m(\cos\theta) \quad (9)$$

untuk potensial harmonik permukaan bola $U(l)$ pada unit lingkaran unit, didapatkan persamaan berikut ini untuk medan di dalam dan di luar distribusi massa:

$$\begin{aligned} U_{in}(r, l) &= \left(\frac{r}{a} \right)^l U(l) \\ U_{out}(r, l) &= \left(\frac{a}{r} \right)^l U(l) \end{aligned} \quad (10)$$

Untuk gravitasi menjadi:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{in}(r, l) &= -\frac{l}{a^l} r^{l-1} U(l) \hat{r} \\ \mathbf{g}_{out}(r, l) &= a^{l+1} (l+1) \frac{l}{r^{l+2}} U(l) \hat{r} \end{aligned} \quad (11)$$

Gravitasi yang disebabkan oleh lembaran massa tipis dengan derajat harmonik bola l digambarkan oleh sebuah lembaran dengan menghilangkan ketebalan dan dinamakan densitas massa per satuan luas $\sigma(l)$.

Dengan cara ini kita bisa melakukan perhitungan dengan r konstan dan hasilnya diterapkan untuk simetri bola.

Berdasar hukum Gauss bahwa fluks melalui permukaan tertutup suatu massa yang kecil sama dengan total massa tertutup dikalikan $-4\pi G$.

$$g_{out} - g_{in} = 4\pi G\sigma(l) \quad (12)$$

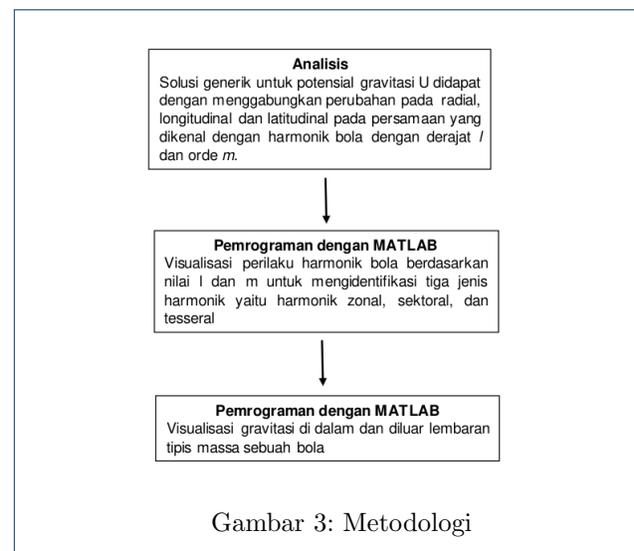
Untuk sebuah *shell* yang mempunyai radius a , dengan menggunakan persamaan 11 di dapat $g_{out} = \frac{U(l)(l+1)}{a}$ dan $-g_{in} = \frac{U(l)l}{a}$, dan dari persamaan 12 diperoleh penyelesaian $U(l) = \frac{4\pi G\sigma(l)a}{2l+1}$ dengan memasukkan ke persamaan 11 lagi didapatkan gravitasi di dalam dan di luar distribusi massa,

$$\begin{aligned} g_{in}(r, l) &= \frac{4\pi Gl}{2l+1} \sigma(l) \frac{r^{l-1}}{a^{l-1}} \\ g_{in}(r, l) &= \frac{4\pi Gl(l+1)}{2l+1} \sigma(l) \frac{a^{l+2}}{r^{l+2}} \end{aligned}$$

Dalam penelitian ini telah divisualisasikan perilaku harmonik bola berdasarkan nilai l dan m untuk mengidentifikasi tiga jenis harmonik yaitu harmonik zonal, sektoral, dan tesseral, dan visualisasi gravitasi di dalam dan diluar lembaran tipis massa sebuah bola, dengan menggunakan pemrograman MATLAB [5] dan fungsi yang ada dalam fitur *Products, solutions, Academia, Support, Community* dari MathWork MATLAB [6].

METODOLOGI

Metode penelitian dibagi menjadi tiga bagian seperti bagan berikut:

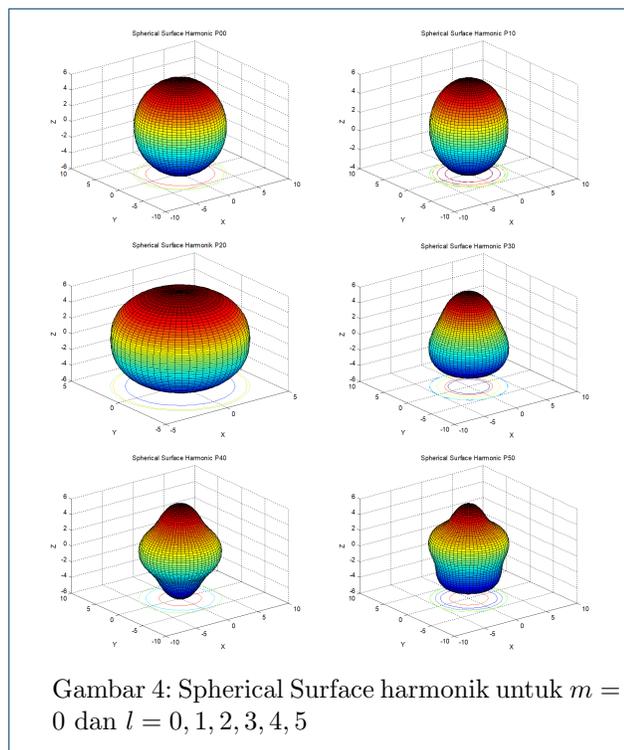


Gambar 3: Metodologi

Persamaan harmonik bola dengan derajat l dan orde m divisualisasikan dalam tiga dimensi berdasarkan nilai derajat l dan orde m dengan menggunakan pemrograman MATLAB, dan dikelompokkan dalam ketiga jenis harmonik yaitu : zonal, sektoral dan tesseral.

Visualisasi perilaku harmonik bola maupun gravitasi lembaran tipis massa sebuah bola ditampilkan dalam tiga dimensi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

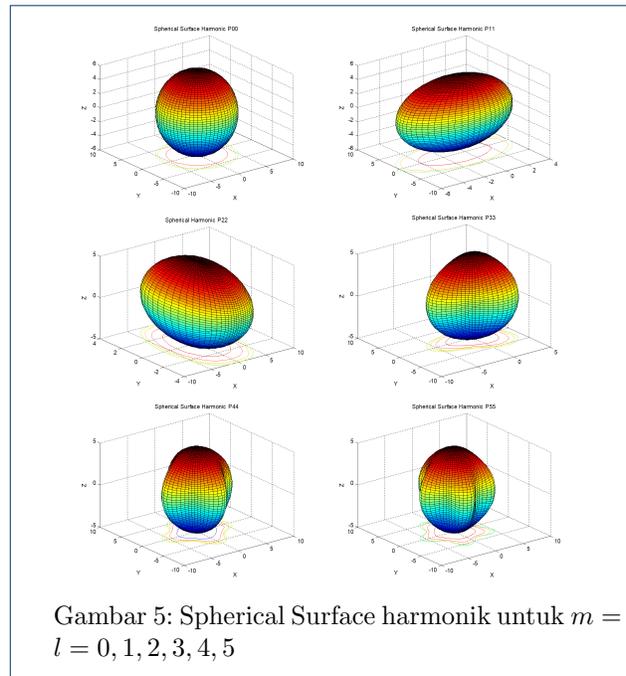


Dalam penelitian ini ada tiga program yang dibuat dengan MATLAB:

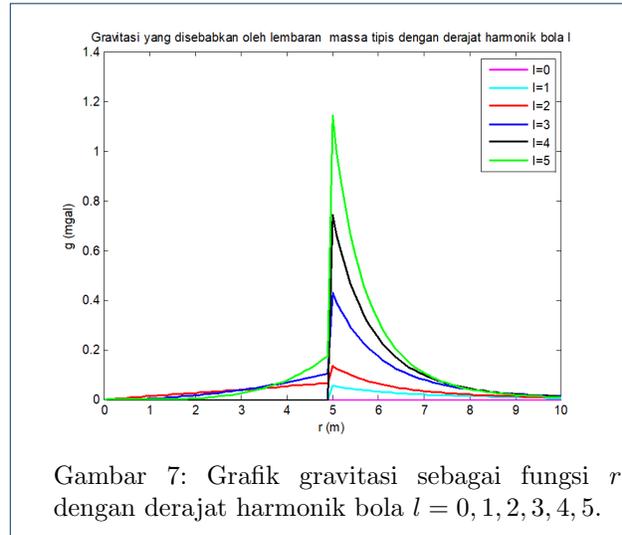
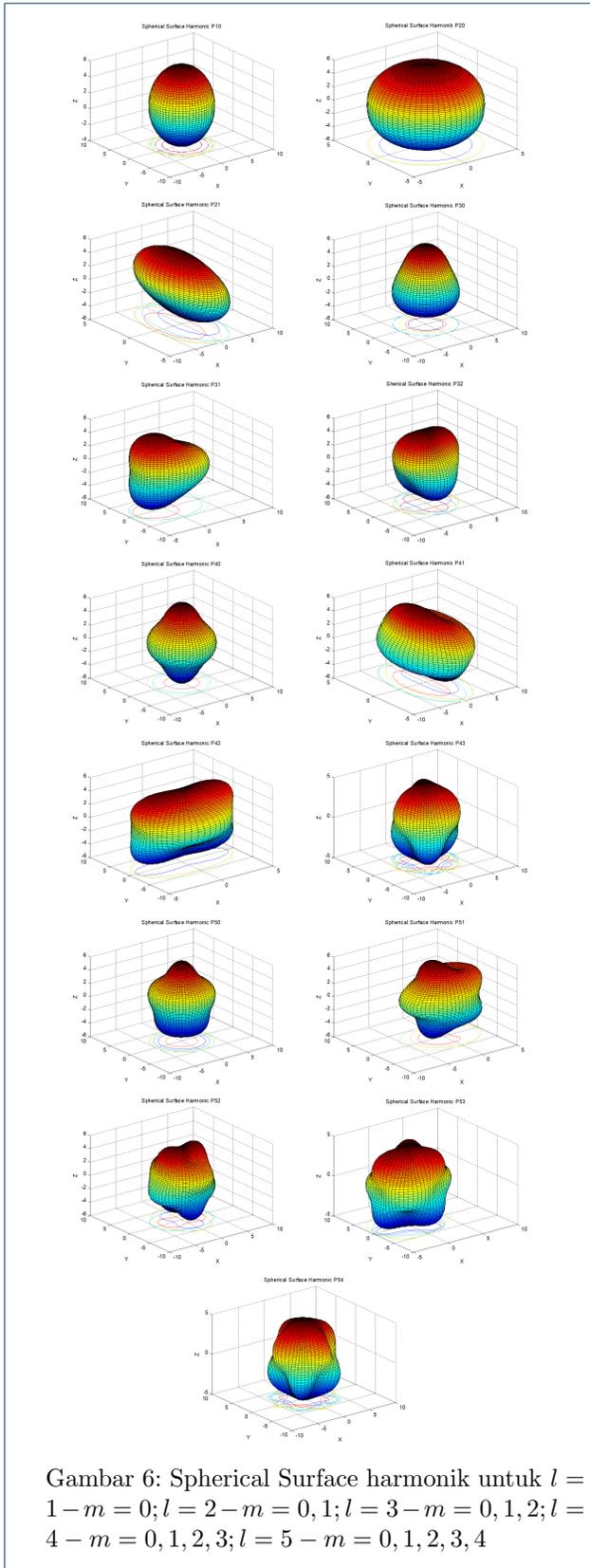
Menghitung fungsi harmonik bola dengan derajat l dan orde m , dan memvisualisasikan dalam gambar tiga dimensi, dan dikelompokkan berdasarkan Harmonik zonal dalam bentuk $P_l^0(\cos \theta) = P_l(\cos \theta)$, Harmonik sektoral dalam bentuk $\sin(m\varphi)P_m^m(\cos \theta)$ atau $\cos(m\varphi)P_m^m(\cos \theta)$, Harmonik tesseral dalam bentuk $\sin(m\varphi)P_l^m(\cos \theta)$ atau $\cos(m\varphi)P_l^m(\cos \theta)$ untuk $l \neq m$,

Menghitung gravitasi yang disebabkan oleh lembaran masa tipis sebagai fungsi derajat harmonik bola l , dan memvisualisasikan dalam gambar dua dan tiga dimensi,

Memvisualisasikan gravitasi sebagai fungsi derajat harmonik bola l dalam gambar tiga dimensi.
Program Pertama



```
% Program Matlab untuk
% Associated Legendre Functions
% (Spherical Harmonic Functions)
% Visualisasi dalam tiga dimensi (3D)
Prog5_Legendre.m
% Penentuan konstanta
degree = 7;
order = 7;
% Pembuatan grid
delta = pi/60;
theta = 0 : delta : pi; % altitude
phi = 0 : 2*delta : 2*pi; % longitude
[phi, theta] = meshgrid(phi, theta);
% Perhitungan harmonik
Ymm = legendre(degree, cos(theta(:,1)));
Ymm = Ymm(order+1,:);
yy = Ymm;
for kk = 2: size(theta,1);
yy = [yy Ymm];
end;
yy = yy.*cos(order*phi);
order = max(max(abs(yy)));
rho = 5 + 1*yy/order;
% Penerapan persamaan koordinat bola
r = rho.*sin(theta);
x = r.*cos(phi);
y = r.*sin(phi);
z = rho.*cos(theta);
% Plot pada permukaan
surf(x,y,z)
```



Program Kedua

```

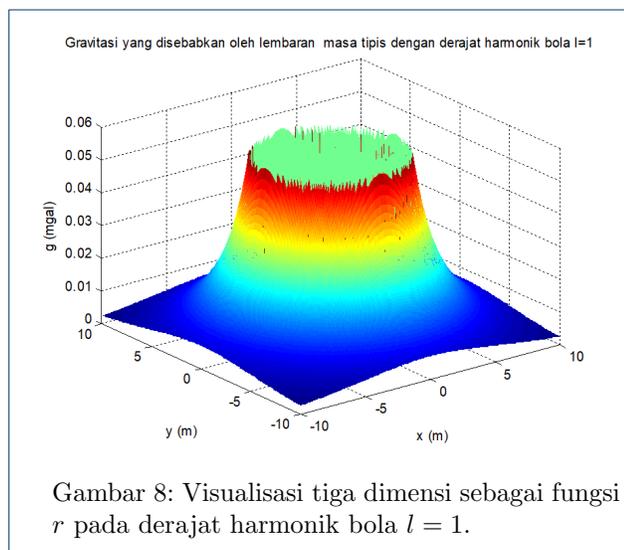
% Gravitasi yang disebabkan oleh lembaran
% masa tipis dengan derajat harmonik bola l
% Visualisasi dalam 2 dimensi
% G adalah konstanta gravitasi universal
% (d disesuaikan dengan unit mgal)
% (6.67 x 10^-11 kg-lm3s-2)
% sigma adalah kontras densitas (g/cm2)
% a adalah jari-jari shell (m)
G=6.67e-3;
sigma=1;
a=5;
l=0;
l1=1;
l2=2;
l3=3;
l4=4;
l5=5;
r=(0:0.1:10);
for i=1:101;
% perhitungan gravitasi sebagai fungsi
% derajat harmonik bola l
if r(i) < a
g0(i)=((4*pi*G*l*sigma*l)./(2*l+1))
.*((r(i).^(l-1))./(a.^(l-1)));
g1(i)=((4*pi*G*l1*sigma*l1)./(2*l1+1))
.*((r(i).^(l1-1))./(a.^(l1-1)));
g2(i)=((4*pi*G*l2*sigma*l2)./(2*l2+1))
.*((r(i).^(l2-1))./(a.^(l2-1)));
g3(i)=((4*pi*G*l3*sigma*l3)./(2*l3+1))
.*((r(i).^(l3-1))./(a.^(l3-1)));
g4(i)=((4*pi*G*l4*sigma*l4)./(2*l4+1))
.*((r(i).^(l4-1))./(a.^(l4-1)));
g5(i)=((4*pi*G*l5*sigma*l5)./(2*l5+1))

```

```

        .*((r(i).^(15-1))./(a.^(15-1)));
    else
    g0(i)=((4*pi*G*l*sigma*l.*(l+1))
        ./((2*l+1)).*((a.^(l+2)).
        /(r(i).^(l+2))));
    g1(i)=((4*pi*G*l1*sigma*l1.*(l1+1))
        ./((2*l1+1)).*((a.^(l1+2))
        /(r(i).^(l1+2))));
    g2(i)=((4*pi*G*l2*sigma*l2.*(l2+1))
        ./((2*l2+1)).*((a.^(l2+2))
        /(r(i).^(l2+2))));
    g3(i)=((4*pi*G*l3*sigma*l3.*(l3+1))
        ./((2*l3+1)).*((a.^(l3+2))
        /(r(i).^(l3+2))));
    g4(i)=((4*pi*G*l4*sigma*l4.*(l4+1))
        ./((2*l4+1)).*((a.^(l4+2))
        /(r(i).^(l4+2))));
    g5(i)=((4*pi*G*l5*sigma*l5.*(l5+1))
        ./((2*l5+1)).*((a.^(l5+2))
        /(r(i).^(l5+2))));
    end
    end
    % display
    plot(r,g0,'m');
    hold on
    plot(r,g1,'c');
    plot(r,g2,'r');
    plot(r,g3,'b');
    plot(r,g4,'k');
    plot(r,g5,'g');

```

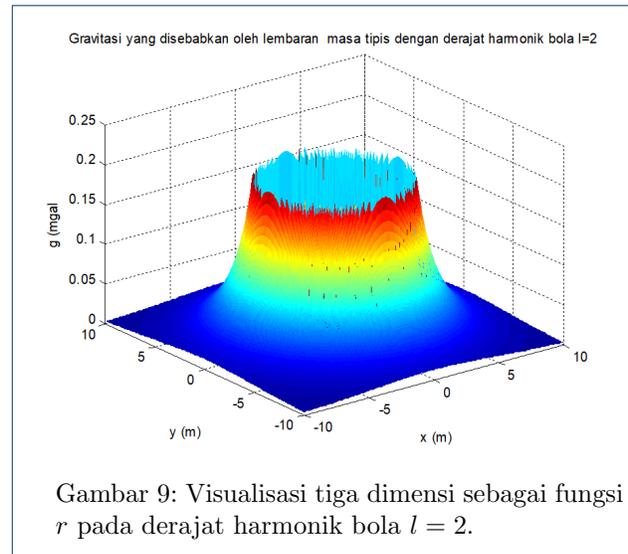


Program Ketiga

```

% Gravitasi yang disebabkan oleh

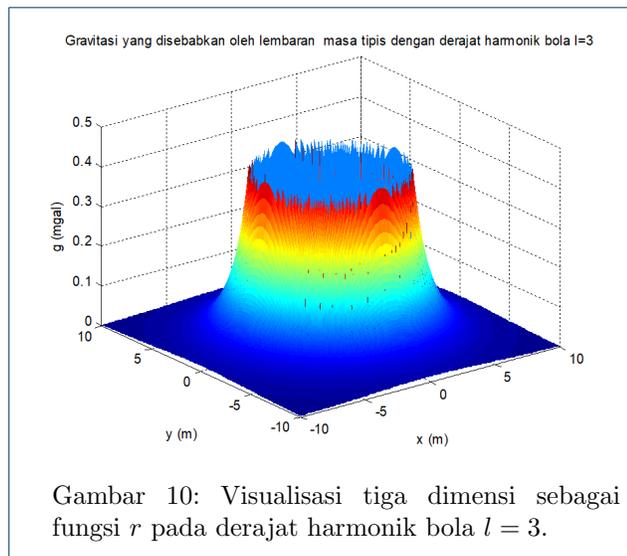
```



```

% lemparan masa tipis dengan
% derajat harmonik bola l
% Visualisasi dalam 3 dimensi
% G adalah konstanta gravitasi universal
% (d disesuaikan dengan unit mgal)
% (6.67 x 10^-11 kg-1m3s-2)
% sigma adalah kontras densitas (g/cm2)
% a adalah jari-jari shell (m)
G=6.67e-3;
sigma=1;
a=5;
l=1;
% x,y is koordinat kartesian
% dari origin(m)
% r adalah jarak dari origin (m)
[x,y]=meshgrid(-10:0.1:10,-10:0.1:10);
r=(x.^2+y.^2).^0.5;
% perhitungan gravitasi sebagai
% fungsi derajat harmonik bola l
for i=1:201;
for j=1:201;
if r(i,j) < a
g(i,j)=((4*pi*G*l*sigma*l)./(2*l+1))
.*((r(i,j).^(l-1))./(a.^(l-1)));
else
g(i,j)=((4*pi*G*l*sigma*l.*(l+1))
./((2*l+1)).*((a.^(l+2))
./((r(i,j).^(l+2))));
end
end
end
% Plot the surface
surf(x,y,g)
shading interp;

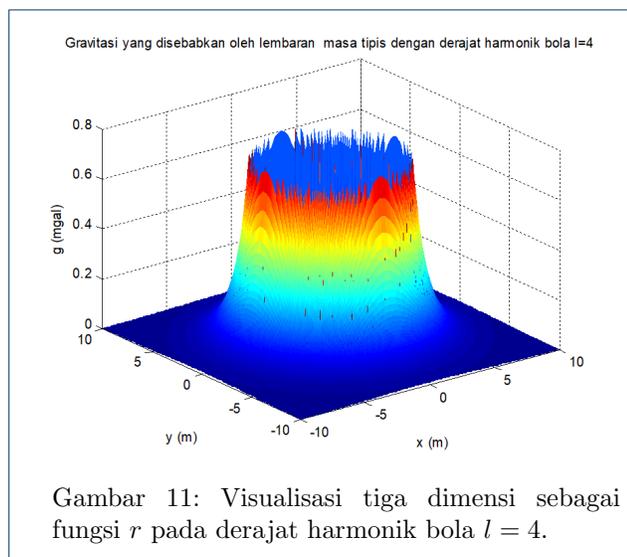
```



Visualisasi 3 dimensi fungsi Harmonik bola dengan derajat l dan orde m :

Harmonik zonal dalam bentuk $P_l^0(\cos \theta) = P_l(\cos \theta)$

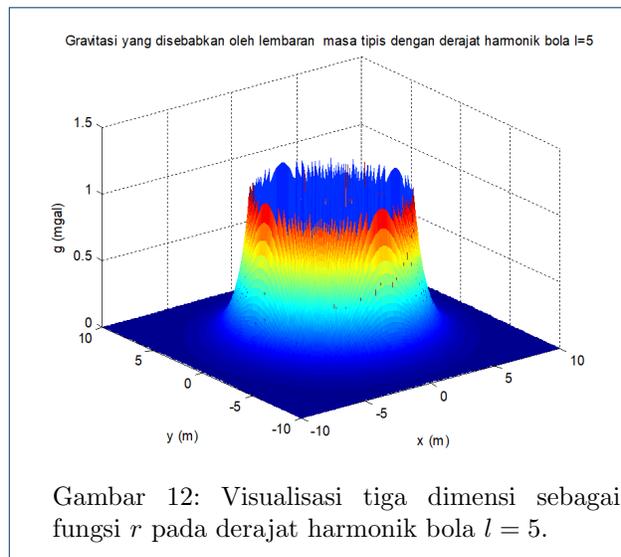
Gambar berikut adalah grafik tiga dimensi dari spherical surface harmonic zonal untuk $m = 0$ dan $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ pada gambar 4 terlihat bahwa Superposisi polinomial Legendre ini menggambarkan variasi berdasarkan garis lintang, tidak tergantung pada garis bujur. Harmonik zona akan mengecil pada l lingkaran kecil pada globe, membagi bola ke zona latitudinal.



Harmonik sektoral dalam bentuk $\sin(m\varphi)P_m^m(\cos \theta)$ atau $\cos(m\varphi)P_m^m(\cos \theta)$

Gambar berikut adalah grafik tiga dimensi dari spherical surface harmonic sektoral untuk $l = m =$

$0, 1, 2, 3, 4, 5$ pada gambar 5 terlihat bahwa akan mengecil pada $2m$ meridian (garis longitudinal, jadi m lingkaran besar), akan membagi bola ke dalam sektor-sektor.



Harmonik tesselal adalah yang berbentuk atau untuk $l-m$

Gambar berikut adalah grafik tiga dimensi dari spherical surface harmonic tesselal untuk $l = 1 - m = 0; l = 2 - m = 0, 1; l = 3 - m = 0, 1, 2; l = 4 - m = 0, 1, 2, 3; l = 5 - m = 0, 1, 2, 3, 4$ pada gambar 6 terlihat bahwa amplitudo harmonik bola permukaan dengan derajat l dan orde m tertentu akan makin mengecil pada $2m$ meridian garis bujur dan pada $(l-m)$ paralel garis lintang.

Visualisasi gravitasi di dalam dan diluar lemparan tipis massa sebuah bola dalam dua dimensi

Pada gambar 7 ditunjukkan bahwa diskontinuitas nilai gravitasi pada posisi $r = \text{jari} - \text{jari}$ untuk lemparan bola tipis dengan derajat harmonik bola l akan semakin besar dengan bertambahnya nilai l .

Tampilan dalam tiga dimensi digambarkan dalam Gambar 8, 9, 10, 11, 12, bidang horisontal menggambarkan posisi x dan y sedangkan sumbu vertikal menggambarkan nilai gravitasi.

KESIMPULAN

Dalam penelitian ini telah berhasil dibuat program untuk visualisasi harmonik zonal, harmonik sektoral, harmonik tesselal, dan visualisasi gravitasi lemparan bola tipis dengan derajat harmonik bola l baik dalam tampilan dua dimensi dan tiga dimensi.

Sesuai dengan teoritikal bahwa visualisasi pada harmonik zonal akan membagi bola ke zonal latitudinal; harmonik sektoral akan membagi bola

ke dalam sektor-sektor; dan harmonik tesseral menggambarkan amplitudo harmonik bola permukaan dengan derajat l dan orde m tertentu akan makin mengecil pada $2m$ meridian garis bujur dan pada $(l - m)$ paralel garis lintang.

Diskontinuitas nilai gravitasi pada posisi $r = \text{jari} - \text{jari}$ untuk lembaran bola tipis dengan derajat harmonik bola l akan semakin besar dengan bertambahnya nilai l .

PENULIS

- 1 Ari Setiawan
Dari :

(1) Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan, Universitas Gadjah Mada

Pustaka

1. Schubert G. Treatise on Geophysics. 2nd ed. Oxford: Elsevier; 2015.
2. Telford WM, Geldart LP, Sheriff RE, KeysTelford DA. Applied geophysics: Cambridge. New York, U.S.A.: Cambridge; 1981.
3. BOAS ML. Mathematical methods in the physical sciences. 2nd ed. John Wiley & Sons, Inc.; 1983.
4. Torge W. Gravimetry: de-Gruyter. Berlin, New York; 1989.
5. Hanselman D, Littlefield B. The student edition of MATLAB: user's guide: with tutorial, The Math Works, Inc. 4th ed. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, Inc., A Simon & Schuster Company; 1995.
6. The MathWorks I. MathWork MATLAB. MathWork; 2018.