ARTIKEL RISET

Tinjauan Singularitas Ruang-waktu dalam Teori Relativitas Umum menggunakan Software Maxima

Ibnu Jihad[*], Devy Pramudyah Wardhani and M. Farchani Rosyid

Ringkasan

Singularitas ruang-waktu pada teori relativitas umum telah ditinjau. Definisi singularitas telah diperjelas menggunakan kriteria singularitas berdasarkan skalar Kretschmann. Letak Daerah singularitas pada tiga jenis ruang-waktu pun telah diketahui berdasarkan perhitungan skalar Kretschmann menggunakan software gratis Maxima yang sangat mempermudah perhitungannya. Tiga jenis ruang-waktu itu adalah ruang-waktu bermetrik Schwarzschild, ruang-waktu bermetrik Reissner-Nordstorm, serta ruang-waktu bermetrik Robertson-Walker dengan model alam semesta Einstein-de Sitter.

Kata Kunci : singularitas ruang-waktu, lubang-hitam, jejari Schwarschild, skalar Kretschmann.

Abstract

The singularity of spacetime on the general theory of relativity has been reviewed. The definition of singularity has been clarified using the Kretschmann scalar criteria based on the singularity. The location of the singularity region in three types of spacetime has also been known based on the Kretschmann scalar calculation using the free software Maxima which significantly simplifies the calculation. The three types of spacetime are Schwarzschild's spacetime, Reissner-Nordstorm metric spacetime, and Robertson-Walker's metric spacetime with the Einstein-de Sitter universe model.

Keywords: spacetime singularity; blackhole; Schwarschild radius; Kretschmann scalar.

1 PENDAHULUAN

Teori Relativitas Umum (TRU), diusulkan untuk menyempurnakan teori klasik gravitasi Newton. Pada TRU ini diperkenalkan kelengkungan waktu yang merupakan percikan (*manifestation*) dari geometri ruang-waktu. Pada TRU muncul gejala baru yang tidak teramati menurut cara pandang klasik, yaitu singularitas ruang-waktu.[1]

Daerah singularitas dalam ruang-waktu didefinisikan sebagai daerah tempat hukum-hukum fisika menjadi rusak dan tidak lagi berlaku [2]. Hal ini disebabkan karena beberapa parameter fisis seperti massa, rapat massa dan kelengkungan ruang-waktu nilainya menuju ekstrim dan meledak [3].

Kriteria yang tepat perlu ditentukan agar penentuan daerah singularitas akurat. Singularitas ada dua macam yaitu singularitas nyata dan singularitas semu[3]. Kriteria yang akan ditentukan harus mampu membedakan antara singularitas nyata dan singularitas semu. Jika kriteria tersebut telah ditentukan, maka akan dicari letak daerah singularitas pada ruang-waktu Schwarzschild, Reissner-Nordstörm, dan Robertson-Walker.

2 RUANG-WAKTU MELENGKUNG

Gravitasi dipandang sebagai percikan dari geometri ruang-waktu. Ruang-waktu yang digunakan merupakan keragaman licin (*differentiable manifolds*) yang memiliki tensor metrik semi-Riemannian. Lazimnya sebuah keragaman, pada tiap titiknya dapat dibangun beberapa objek seperti vektor singgung, vektor jodoh, tensor kovarian, tensor kontravarian, ataupun tensor campuran. Jika pada seluruh titik diseluruh keragaman disematkan objek-objek tersebut, maka akan terbentuk medan vektor singgung, medan vektor jodoh, medan tensor

[*]Correspondence: *ibnu.jihad@ugm.ac.id*
Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta, Indonesia
Full list of author information is available at the end of the article
[†]Equal contributor

kovarian, medan tensor kontravarian, dan medan tensor campuran.

Keberadaan medan tensor-metrik semi-Riemannian tersebut menghasilkan objek-objek baru dalam ruang-waktu ini yaitu koneksi, turunan kovarian, pengangkutan paralel, persamaan geodesik, tensor kelengkungan Riemann, tensor Ricci, dan skalar Ricci serta objek-objek matematis lain.

3 LETAK DAERAH SINGULARITAS

Daerah singularitas tidak dapat ditentukan dari medan tensor metriknya secara langsung. Medan tensor metrik adalah besaran yang gayut pada tata-koordinat, atau tak-invarian. Singularitas yang didapatkan dari medan tensor bisa jadi bukan singularitas nyata, namun hanya singularitas semu saja. Kriteria yang lazim digunakan untuk menentukan daerah singularitas adalah menggunakan skalar, karena sifatnya yang invarian. Skalar yang lazim digunakan adalah skalar Kretschmann[3].

Definisi daerah singularitas dapat dituliskan :
Daerah singularitas *adalah daerah tempat skalar Kretschmann bernilai tak-hingga. Nilai skalar Kretschmann tersebut diberikan oleh :*

$$R^{\mu\nu\sigma\rho}R_{\mu\nu\sigma\rho} \tag{1}$$

Kedua jenis tensor tersebut diperoleh dengan bantuan medan tensor metrik pada keragaman tersebut, yaitu $R^{\mu\nu\sigma\rho} = g^{\nu\beta}g^{\sigma\gamma}g^{\rho\lambda}R^{\mu}_{\beta\gamma\lambda}$ dan $R_{\mu\nu\sigma\rho} = g_{\mu\kappa}R^{\kappa}_{\nu\sigma\rho}$.

3.1 Letak daerah singularitas pada ruang-waktu Schwarzschild

Tensor metrik pertama yang dihitung adalah tensor metrik Schwarzschild[4]. Metrik ini adalah solusi untuk persamaan Einstein dengan sebaran massa dan tenaga yang hanya terkonsentrasi pada daerah berbentuk kulit bola simetris. Ruang diluar kulit bola tersebut dianggap vakum. Selain keadaan simetri kulit bola, tensor metrik ini berlaku untuk bentuk sebaran massa yang tetap (static), tidak berubah-ubah.

Penggalan panjang dinyatakan dengan tensor metrik Schwarzschild, dinyatakan dalam tata koordinat kulit bola $\{t, r, \theta, \phi\}$ adalah:

$$\begin{aligned} ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \\ \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \end{aligned} \tag{2}$$

dengan M adalah massa benda sumber gravitasi $d\Omega^2$ adalah penggalan panjang pada suatu kulit bola berderajat 2,

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \tag{3}$$

Perhitungan skalar Kretschmann ini dapat segera dikerjakan. Penulis menggunakan alat bantu berupa perangkat lunak Maxima[**?**], suatu CAS (*Computer Algebra System*) yang berlisensi bebas pakai. Dari perhitungan skalar Ricci diperoleh $R = 0$. Hasil perhitungan diperoleh pula skalar Kretschmann :

$$R^{\mu\nu\sigma\rho}R_{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{48G^2M^2}{R^6} \tag{4}$$

Dari hasil tersebut, nilai skalar Kretschmann akan bernilai tak-hingga jika penyebutnya bernilai 0. Jadi terdapat singularitas di daerah $r = 0$. Hasil ini sesuai dengan beberapa rujukan seperti Carroll (2003)[5] dan Joshi (2007)[3].

3.2 Letak daerah singularitas pada ruang-waktu Reissner-Nordstörm

Tensor Metrik ini adalah solusi persamaan Einstein, untuk sebaran massa bersimetri kulit bola statis yang bermuatan[6, 7, 8]. Penggalan panjang jika dinyatakan dengan tensor metrik ini adalah :

$$ds^2 = -\Delta dt^2 + \quad Delta^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{5}$$

dengan $\Delta = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{G(Q^2+P^2)}{r^2}$ dan $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Q dan P pada persamaan tersebut adalah total muatan listrik serta total muatan magnet.

Hasil perhitungan skalar Ricci diperoleh $R = 0$. Hasil perhitungan skalar Kretschmann, diperoleh :

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu\sigma\rho}R_{\mu\nu\sigma\rho} = & \frac{56G^2Q^4 + (112G^2P^2 - 96rG^2M)Q^2}{r^8} \\ & + \frac{56G^2P^4 - 96rG^2MP^2}{r^8} \\ & + \frac{48r^2G^2M}{r^8} \end{aligned} \tag{6}$$

Nilai skalar Kretschmann akan mencapai nilai tak hingga untuk nilai $r = 0$. Jika nilai P dan Q nol, hasilnya akan sama seperti pada ruang-waktu Schwarzschild.

3.3 Letak daerah singularitas pada ruang-waktu Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW)

Tensor Metrik Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) muncul dari gagasan alam semesta yang mengembang [9][10]. Penggalan panjang dinyatakan dengan tensor metrik ini dinyatakan sebagai :

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - r^2k/R_0^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2\right] \quad (7)$$

dengan R_0 adalah konstanta pengembangan alam semesta, $a^2(t)$ adalah faktor skala pengembangan, dan k adalah nilai yang terkait dengan kelengkungan alam semesta. Nilai k memiliki tiga kemungkinan, $k = -1$ untuk alam semesta terbuka, $k = 0$ untuk alam semesta datar, dan $k = +1$ untuk alam semesta tertutup.

Faktor skala pengembangan memiliki berbagai macam bentuk, salah satu bentuk yang dipakai untuk menggambarkan kedaan awal alam semesta yang datar adalah $a(t) = t^{2/3}$. Model ini disebut model Einstein-de Sitter[11]. Model ini pernah menjadi model yang paling populer dikalangan ilmuwan. Model ini mengasumsikan penyusun utama alam semesta adalah materi, bukan radiasi. Bentuk faktor skala yang lain adalah $a(t) = t^{1/2}$ Bentuk ini menggambarkan penyusun utama alam semesta adalah radiasi. Hal ini cocok untuk menggambarkan keadaan alam semesta di awal pembentukannya.

Selanjutnya, skalar Kretschmann dihitung dengan memasukkan nilai $k = 1$ dan $a(t) = t^{2/3}$ serta $a(t) = t^{1/2}$. Hasil perhitungan skalar Kretschmann diperoleh untuk $a(t) = t^{2/3}$ yaitu :

$$R^{\mu\nu\sigma\rho} R_{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{80}{27t^4} \quad (8)$$

Skalar Kretschmann menjadi singular, ketika $t = 0$. Hal ini berarti alam semesta bermula dari singularitas. Nilai Skalar Riccinya, sebesar $R = 3/(4t^2)$.

Hasil perhitungan skalar Kretschmann $a(t) = t^{1/2}$ diperoleh untuk yaitu :

$$R^{\mu\nu\sigma\rho} R_{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{3}{2t^4} \quad (9)$$

Skalar Kretschmann menjadi singular, ketika $t = 0$. Hal ini berarti alam semesta bermula dari singularitas pula. Nilai Skalar Riccinya, sebesar $R = 0$.

4 Studi lebih lanjut tentang singularitas

Perkembangan penelitian mengenai singularitas dapat membantu perkembangan teori kuantum gravitasi, karena pada daerah sekitar singularitas, gejala-gejala kuantum gravitasi akan nampak dominan.

Arah perkembangan penelitian di bidang ini dipengaruhi oleh Cosmic Censorship Hypotesis oleh Roger Penrose:

"The complete gravitational collapse of a body always result in a black hole rather than a naked singularity, it means that all the singularities of gravitational collapse are hidden within a black hole in such a way that distant observers cannot seen them."[12]

Perkembangan penelitian berkembang menjadi dua arus utama. Arus pertama, bertujuan untuk membuktikan hipotesis tersebut secara matematis, dengan kerangka berpikir relativitas umum Einstein. Arus kedua, dengan menganggap hipotesis tersebut benar, penelitian dikembangkan untuk mengetahui lebih lanjut mengenai sifat-sifat lubang-hitam.

5 KESIMPULAN

Letak daerah singularitas berdasarkan skalar Kretschmann adalah :

1 $r = 0$, untuk ruang-waktu bermetrik Schwarzshchild.
2 $r = 0$, untuk ruang-waktu bermetrik Reissner-Nordstörm
3 $t = 0$, untuk ruang-waktu bermetrik Robertson-Walker, untuk $a(t) = t^{1/2}$ dan $a(t) = t^{2/3}$

Ucapan Terima Kasih

Ucapan terima kasih disampaikan kepada segenap dosen di Program Studi Fisika Unversitas Gadjah Mada. Ucapan terimakasih juga disampaikan kepada Fakultas MIPA Universitas Gadjah Mada yang telah mendanai kegiatan ini melalui Hibah Penelitian Dosen Dana BPPTNBH dengan nomor kontrak $46/J01.1.28/PL.06.02/2019$.

PENULIS

1 Ibnu Jihad
Dari :
(1) Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada

2 Devy Pramudyah Wardhani
Dari :
(1) Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada

3 M. Farchani Rosyid
Dari :
(1) Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada

Pustaka

1. Landau LD, Lifshitz EM. The Classical Theory of Fields. Elsevier; 1975. Available from: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/C20090146081.
2. Hawking SW, Ellis GFR. The Large Scale Structure of Space-Time. Cambridge University Press; 1973. Available from: https://www.cambridge.org/core/product/identifier/9780511524646/type/book.
3. Joshi PS. Gravitational Collapse and Spacetime Singularities. Cambridge: Cambridge University Press; 2007. Available from: https://www.cambridge.org/core/product/identifier/9780511536274/type/book.
4. Schwarzschild K. On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory. General Relativity and Gravitation. 1999 may;35(5):951–959. Available from: http://link.springer.com/10.1023/A:1022971926521http://arxiv.org/abs/physics/9905030.
5. Carroll SM. Spacetime and Geometry. Addison-Weasley; 2003.
6. Reissner H. Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie. Annalen der Physik. 1916;355(9):106–120. Available from: http://doi.wiley.com/10.1002/andp.19163550905.
7. Weyl H. Zur Gravitationstheorie. Annalen der Physik. 1917;359(18):117–145. Available from: http://doi.wiley.com/10.1002/andp.19173591804.
8. Jeffery GB. The Field of an Electron on Einstein's Theory of Gravitation. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1921 may;99(697):123–134. Available from: http://rspa.royalsocietypublishing.org/cgi/doi/10.1098/rspa.1921.0028.
9. Lachièze-Rey M, Luminet JP. Cosmic topology. Physics Reports. 1995 mar;254(3):135–214. Available from: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/037015739400085H.
10. Ellis GFR, van Elst H. Cosmological models (Cargese lectures 1998). 1998 dec;Available from: http://arxiv.org/abs/gr-qc/9812046.
11. Einstein A, de Sitter W. On the Relation between the Expansion and the Mean Density of the Universe. Proceedings of the National Academy of Sciences. 1932 mar;18(3):213–214. Available from: http://www.pnas.org/cgi/doi/10.1073/pnas.18.3.213.
12. Penrose R. Gravitational collapse: The role of general relativity; 1969.