

ARTIKEL RISET

Kajian Bandul Tergandeng Pada Sebarang Sudut Simpangan Berdasar Metode Runge-Kutta Orde Empat

Fatimah Ar-Rahma^{1*} and Pekik Nurwantoro²

Received: Apr 18, 2024 | Accepted: Mar 18, 2025 | Published: Aug 11, 2025 | DOI: 10.22146/jfi.v29i2.95575

Ringkasan

Penelitian ini akan mengkaji gerak sistem bandul terdangeng pada variasi nilai sudut simpangan awal yang sebarang. Komputasi menggunakan metode *Runge-Kutta* orde empat yang diimplementasikan pada persamaan diferensial nonlinier bagi sistem bandul terdangeng. Disajikan dua bentuk gerak utama pada hasil penelitian yaitu gerak *in phase* dan *out of phase*. Hasil yang diperoleh menunjukkan kesesuaian dengan hasil pada rujukan utama pada daerah sudut simpangan kecil. Hasil juga menunjukkan bahwa program komputasi yang digunakan dapat diimplementasikan sebagai penyelesaian persamaan diferensial bandul terdangeng pada sudut yang lebih besar sehingga mampu mengatasi keterbatasan metode *Computer Algebra System (CAS)*.

Kata Kunci : bandul terdangeng, metode *Runge-Kutta* orde empat

Abstract

This research will analyze the motion of a coupled pendulum in various arbitrary initial value angles. Computations use the fourth-order Runge-Kutta which are implemented on the coupled pendulum nonlinear differential equation. There are two main modes in the results: the in-phase mode and the out-of-phase mode. Computation results are in agreement with those in the main reference for some small angles. Results also showed that the computational program could be implemented for solving a coupled pendulum nonlinear differential equations on large angles so that it could resolve the limitation of the Computer Algebra System (CAS) method.

Keywords: coupled pendulum; fourth-order Runge-Kutta; keyword three

1 PENDAHULUAN

Bandul terdangeng merupakan sistem bandul yang saling terkait satu sama lain. Beberapa bandul dalam sistem tersebut saling bertukar energi dan menghasilkan perilaku yang dinamis dan beragam. Dinamika sistem bandul terdangeng sangat sensitif terhadap kondisi awal sistem. Perubahan kecil pada kondisi awalnya akan mengakibatkan perubahan pada keadaan akhir bandul terdangeng. Bandul terdangeng secara luas digunakan dalam berbagai kajian pada bidang pendidikan, penelitian, dan pemodelan [1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8] [9].

Pada tahun 1996 (Zhou n Whiteman) melakukan kajian gerak *chaotic* bagi bandul terdangeng [10]. Penelitian menunjukkan grafik hubungan nilai sudut dan kecepatan sudut. Disimpulkan bahwa perilaku

chaotic bagi sistem bandul terdangeng sangat peka terhadap kondisi awal gerak. Perbedaan kecil pada kondisi awal akan memberikan hasil yang berbeda pada grafik hubungan nilai sudut dan kecepatan sudut. Jarvis pada tahun 2017 melakukan pemetaan pola osilasi pada bandul terdangeng [11]. Pada kajian tersebut tampak bahwa dua bandul pada bandul terdangeng akan saling bertukar energi secara terus menerus. Suzuki Suzuki (2009) melakukan analisis gerak bandul terdangeng secara semi-analitik dengan bantuan suatu *Computer Algebra System (CAS)* [12]. Dengan menggunakan program Mathematica, Suzuki dan Suzuki mengkaji penyelesaian persamaan bandul terdangeng dengan sudut awal kecil.

Pada penelitian ini, langkah penyelesaian yang dilakukan oleh Suzuki dan Suzuki bagi persamaan diferensial bandul terdangeng dilakukan dengan pendekatan metode numerik berbasis metode Runge-Kutta orde empat. Metode Runge-Kutta orde tinggi tersebut dipilih dengan pertimbangan ketelitian dan efisiensi pada masalah syarat awal

*Correspondence: fatimahar99@mail.ugm.ac.id

¹ Program Studi Fisika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia, Sekip Utara, Bulaksumur, Sinduadi, Mlati, Kota Yogyakarta, Daerah Istimewa Yogyakarta, Kota Yogyakarta, Indonesia
Full list of author information is available at the end of the article

[13]. Langkah komputasi diperluas pada kajian sudut simpangan yang lebih luas yaitu melibatkan sudut awal besar.

2 METODE PENELITIAN

Langkah komputasi pada penelitian ini menggunakan bahasa pemrograman *Python 3* dan mengeksekusi *source-code* melalui *Google Colaboratory* yang berbasis pada teknologi *Jupyter notebook*. Seluruh langkah komputasi berdasarkan pada penyelesaian persamaan diferensial yang mewakili sistem dua bandul tergantung yaitu dua pendulum yang dihubungkan oleh pegas tak bermassa dengan tetapan gaya pegas k_s dan bergerak dalam bidang vertikal (x, y) yang sama. Dalam sistem ini maka koordinat bagi sistem 2 massa ditunjukkan oleh:

$$x_1 = L_1 \sin \theta_1 \quad y_1 = -L_1 \cos \theta_1 \quad (1)$$

untuk massa ke 1, dan

$$x_2 = L_2 \sin \theta_2 \quad y_2 = -L_2 \cos \theta_2 \quad (2)$$

Dalam persamaan tersebut, L_1 dan L_2 merupakan panjang tali penggantung bandul pertama dan bandul kedua, sedangkan θ_1 dan θ_2 merupakan sudut simpangan bandul pertama dan bandul kedua terhadap posisi setimbang masing-masing.

Ungkapan Lagrange (L) yang merupakan selisih antara energi kinetik dan energi potensial diberikan oleh bentuk:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 - \frac{1}{2}k_s(x_2 - x_1)^2 - m_1gy_1 - m_2gy_2 \quad (3)$$

Dalam ungkapan di atas, suku $\frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2$ dapat diabaikan karena nilainya jauh lebih kecil dibandingkan dengan suku-suku lainnya. Dengan mensubstitusikan Persamaan 1 dan Persamaan 2 ke dalam Persamaan 3, diperoleh bentuk eksplisit *Lagrangian* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & m_1gL_1 \cos \theta_1 + m_2gL_2 \cos \theta_2 \\ & - \frac{1}{2}k_sL_1^2 \sin^2 \theta_1 + k_sL_1L_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 - \frac{1}{2}k_sL_2^2 \sin^2 \theta_2 \\ & + \frac{1}{2}m_1L_1^2\dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 + \frac{1}{2}m_2L_2^2\dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2 \end{aligned} \quad (4)$$

Menggunakan persamaan Lagrange, persamaan gerak bagi bandul ke 1 dan bandul ke 2 berbentuk:

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{m_1g \tan \theta_1 + k_sL_1 \sin \theta_1 - k_sL_2 \sin \theta_2 + L_1m_1\dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1}{L_1m_1 \cos \theta_1} = 0 \quad (5)$$

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{m_2g \tan \theta_2 + k_sL_2 \sin \theta_2 - k_sL_1 \sin \theta_1 + L_2m_2\dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2}{L_2m_2 \cos \theta_2} = 0 \quad (6)$$

Ditinjau pengambilan selang waktu diskret Δt sehingga pada pembagian sebanyak N cacah waktu dari waktu awal t_0 maka dipenuhi $t_i = t_0 + i\Delta t$; $i = 1, 2, \dots, N$. Berdasar persamaan gerak tersebut maka bentuk eksplisit 4 parameter untuk perhitungan nilai kecepatan sudut beserta sudut simpangan pada waktu ke i bagi bandul ke 1, yaitu $\omega_{1(i)} \equiv \omega_1(t_i) = \dot{\theta}_1(t_i)$ serta $\theta_{1(i)} \equiv \theta_1(t_i)$, yang diperlukan pada algoritma *Runge-Kutta* orde empat yaitu:

$$\begin{aligned} k_{11}^1 = & - \frac{m_1g \tan \theta_{1(i-1)} + k_sL_1 \sin \theta_{1(i-1)}}{L_1m_1 \cos \theta_{1(i-1)}} \\ & + \frac{-k_sL_2 \sin \theta_{2(i-1)} - L_1m_1\omega_{1(i-1)}^2 \sin \theta_{1(i-1)}}{L_1m_1 \cos \theta_{1(i-1)}} \end{aligned} \quad (7)$$

$$k_{11}^2 = \omega_{1(i-1)}. \quad (8)$$

$$\begin{aligned} k_{21}^1 = & - \frac{m_1g \tan \left(\theta_{1(i-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_{11}^2 \right) + k_sL_1 \sin \left(\theta_{1(i-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_{11}^2 \right)}{L_1m_1 \cos \left(\theta_{1(i-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_{11}^2 \right)} \\ & - \frac{k_sL_2 \sin \left(\theta_{2(i-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_{12}^2 \right)}{L_1m_1 \cos \left(\theta_{1(i-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_{11}^2 \right)} \\ & - \frac{L_1m_1 \left(\dot{\theta}_{1(i-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_{11}^1 \right)^2 \sin \left(\theta_{1(i-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_{11}^2 \right)}{L_1m_1 \cos \left(\theta_{1(i-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_{11}^2 \right)}. \end{aligned} \quad (9)$$

$$k_{21}^2 = \omega_{1(i-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_{11}^1 \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
k_{31}^1 = & - \frac{m_1 g \tan \left(\theta_{1(i-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_{21}^2 \right)}{L_1 m_1 \cos \left(\theta_{1(i-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_{21}^2 \right)} \\
& - \frac{k_s L_2 \sin \left(\theta_{2(i-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_{22}^2 \right)}{L_1 m_1 \cos \left(\theta_{1(i-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_{21}^2 \right)} \\
& - \frac{L_1 m_1 \left(\dot{\theta}_{1(i-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_{21}^1 \right)^2 \sin \left(\theta_{1(i-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_{21}^2 \right)}{L_1 m_1 \cos \left(\theta_{1(i-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_{21}^2 \right)}
\end{aligned} \quad (11)$$

$$k_{31}^2 = \omega_{1(i-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_{21}^1. \quad (12)$$

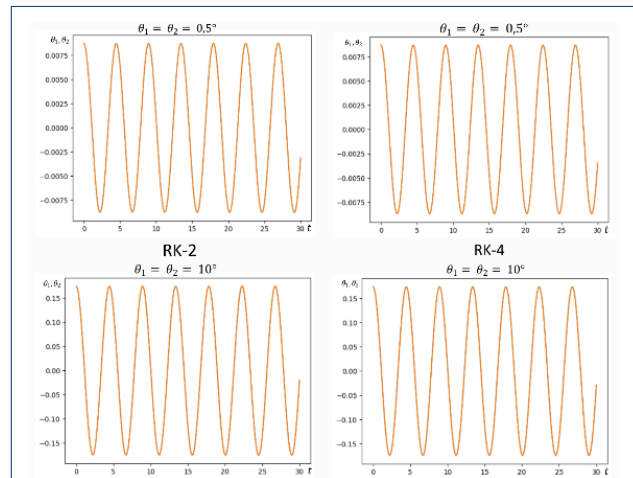
$$\begin{aligned}
k_{41}^1 = & - \frac{m_1 g \tan \left(\theta_{1(i-1)} + \Delta t k_{31}^2 \right)}{L_1 m_1 \cos \left(\theta_{1(i-1)} + \Delta t k_{31}^2 \right)} \\
& - \frac{k_s L_2 \sin \left(\theta_{2(i-1)} + \Delta t k_{32}^2 \right)}{L_1 m_1 \cos \left(\theta_{1(i-1)} + \Delta t k_{31}^2 \right)} \\
& - \frac{L_1 m_1 \left(\dot{\theta}_{1(i-1)} + \Delta t k_{31}^1 \right)^2 \sin \left(\theta_{1(i-1)} + \Delta t k_{31}^2 \right)}{L_1 m_1 \cos \left(\theta_{1(i-1)} + \Delta t k_{31}^2 \right)}.
\end{aligned} \quad (13)$$

$$k_{41}^2 = \omega_{1(i-1)} + \Delta t k_{31}^1 \quad (14)$$

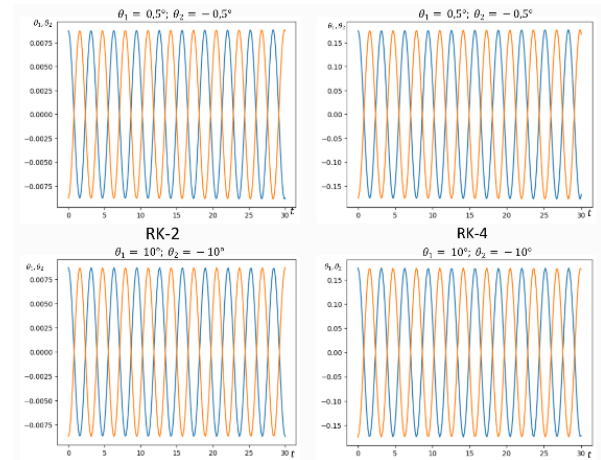
$$\omega_{1(i)} = \omega_{1(i-1)} + \frac{\Delta t}{6} (k_{11}^1 + 2k_{21}^1 + 2k_{31}^1 + k_{41}^1). \quad (15)$$

$$\theta_{1(i)} = \theta_{1(i-1)} + \frac{\Delta t}{6} (k_{11}^2 + 2k_{21}^2 + 2k_{31}^2 + k_{41}^2). \quad (16)$$

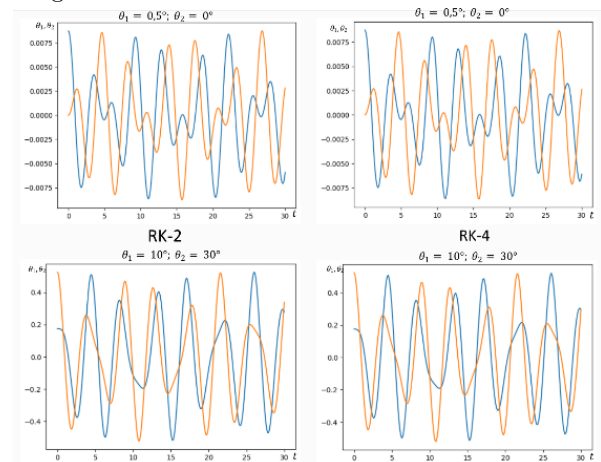
Bentuk eksplisit 4 parameter bagi bandul ke 2 akan analog dengan ungkapan yang diberikan oleh persamaan 7 - 16 diatas dengan mengganti indeks 1 ke 2 dan sebaliknya.



(a) Grafik θ_1, θ_2 terhadap t untuk sembarang sudut dengan $\theta_1 = \theta_2$



(b) Grafik θ_1, θ_2 terhadap t untuk sembarang sudut dengan $\theta_1 \neq \theta_2$



(c) Grafik θ_1, θ_2 terhadap t untuk sembarang sudut dengan $\theta_1 \neq \theta_2$

Gambar 1: Plot θ_1 dan θ_2 sebagai fungsi t

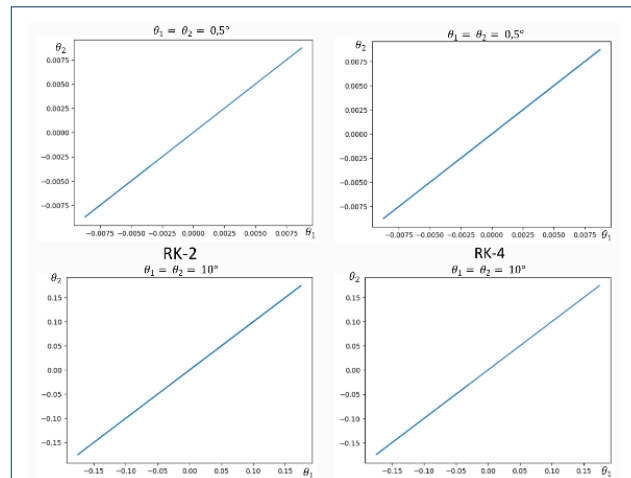
3 HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil berikut didasarkan pada penyelesaian persamaan diferensial nonlinier untuk bandul terdangeng berdasar metode Runge-Kutta orde empat yang diuraikan pada Bagian 2 di atas. Diasumsikan massa kedua bandul diambil $m_1 = m_2 = 1$ kg, panjang tali kedua bandul adalah $L_1 = L_2 = 5$ m, percepatan gravitasi $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, sedangkan nilai awal ω_1 dan ω_2 , yaitu nilai ω_1 dan ω_2 saat $t = 0$ adalah $\omega_{10} = \omega_{20} = 0$. Jumlah titik diskret diambil $N = 200$ untuk rentang waktu yang ditinjau. Dalam semua hasil di bawah maka juga ditampilkan perbandingan antara hasil yang diperoleh berdasar metode Runge-Kutta orde empat terhadap metode Runge-Kutta yang tidak efisien, yaitu orde dua dengan $N = 500$.

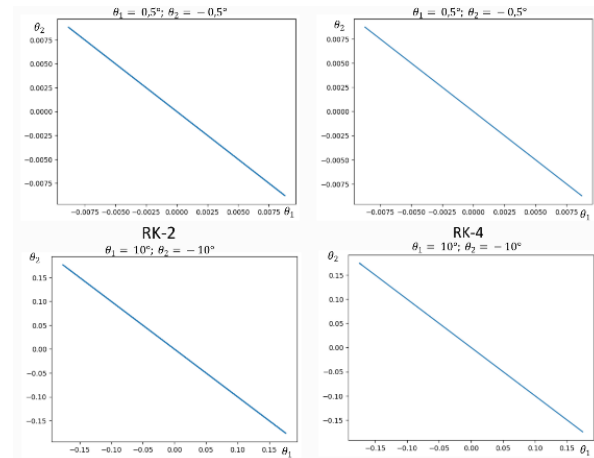
Pada Gambar 1a terlihat bahwa gerak kedua bandul pada sistem bandul terdangeng bersifat *in phase* ketika diberikan kondisi awal $\theta_1(t) = \theta_2(t)$. Sementara itu, pada Gambar 1b gerak kedua bandul bersifat *out of phase* ketika kondisi awal yang diberikan adalah $\theta_1(t) = -\theta_2(t)$. Berbeda dengan kedua kondisi tersebut, Gambar 1c menunjukkan bahwa gerak bandul terdangeng memiliki pola osilasi yang lebih kompleks. Ketika bandul pertama berada pada sudut 0° , bandul kedua berada pada amplitudo maksimum. Sebaliknya, ketika bandul kedua berada pada sudut 0° , bandul pertama mencapai amplitudo maksimum. Fenomena ini menunjukkan adanya pertukaran energi secara periodik antara kedua bandul akibat kopling pegas, sehingga energi mekanik berpindah secara bergantian dari satu bandul ke bandul lainnya. Hasil ini sejalan dengan penelitian yang dilakukan oleh Jarvis (2016) [11].

Pada Gambar 2a, gerak bandul terdangeng yang bersifat *in phase* dapat diamati dengan memberikan kondisi awal $\theta_{10} = \theta_{20}$. Hasil plot menunjukkan hubungan linier antara θ_1 dan θ_2 dengan kemiringan garis (*slope*) sebesar 1. Selanjutnya, pada Gambar 2b, gerak bandul terdangeng yang bersifat *out of phase* diperoleh dengan memberikan kondisi awal $\theta_{10} = -\theta_{20}$. Grafik yang dihasilkan juga menunjukkan hubungan linier, namun dengan kemiringan garis (*slope*) sebesar -1 . Berbeda dengan kedua kondisi tersebut, ketika diberikan kondisi awal $\theta_{10} \neq \theta_{20}$, Gambar 2c memperlihatkan lintasan fase yang membentuk pola segi empat berjaring. Pola ini menunjukkan bahwa kedua bandul tidak lagi berosilasi secara serempak, melainkan mengalami pertukaran energi secara periodik sehingga menghasilkan dinamika sistem yang lebih kompleks.

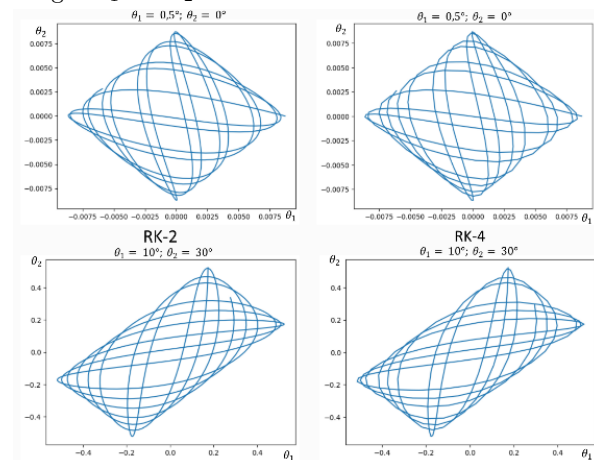
Pada Gambar 3a, gerak bandul terdangeng yang bersifat *in phase* dapat diamati dengan memberikan kondisi awal $\theta_{10} = \theta_{20}$. Hasil plot fase antara ω_1 dan θ_1 membentuk lintasan elips sederhana



(a) Grafik θ_1 terhadap θ_2 untuk sembarang sudut dengan $\theta_1 = \theta_2$

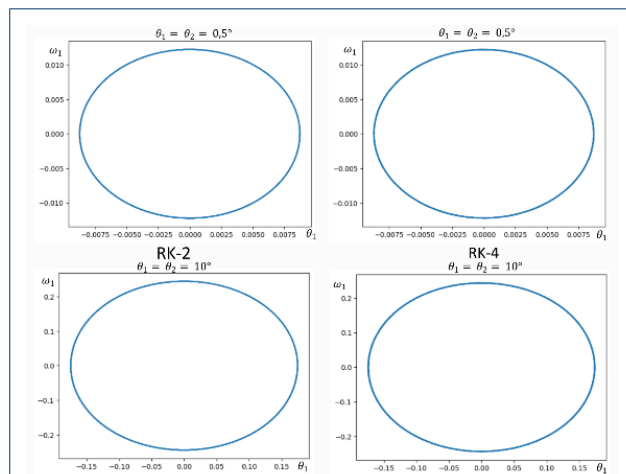


(b) Grafik θ_1 terhadap θ_2 untuk sembarang sudut dengan $\theta_1 = -\theta_2$

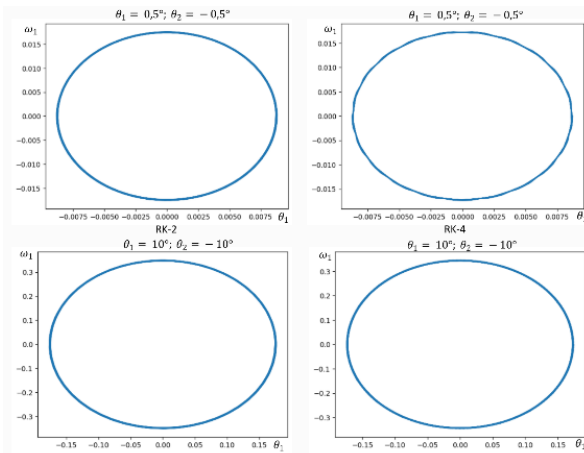


(c) Grafik θ_1 terhadap θ_2 untuk sembarang sudut dengan $\theta_1 \neq \theta_2$

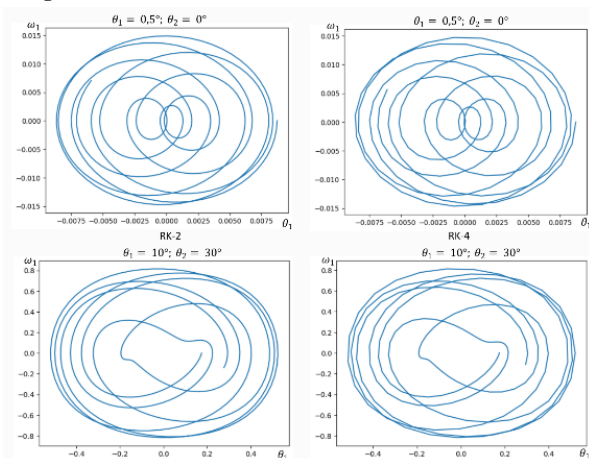
Gambar 2: Plot Parametrik $\theta_1(t)$ terhadap $\theta_2(t)$



(a) Grafik ω_1 terhadap θ_1 untuk sembarang sudut dengan $\theta_1 = \theta_2$



(b) Grafik ω_1 terhadap θ_1 untuk sembarang sudut dengan $\theta_1 = -\theta_2$



(c) Grafik ω_1 terhadap θ_1 untuk sembarang sudut dengan $\theta_1 \neq \theta_2$

Gambar 3: Plot parametrik $\omega_1(t)$ terhadap $\theta_1(t)$

yang menunjukkan gerak osilasi periodik dan stabil. Selanjutnya, pada Gambar 3b, gerak bandul terdang dengan bersifat *out of phase* diperoleh dengan memberikan kondisi awal $\theta_{10} = -\theta_{20}$. Hasil plot juga menunjukkan lintasan berbentuk elips sederhana, meskipun arah dan fase osilasinya berbeda dengan kondisi *in phase*. Berbeda dengan kedua kondisi tersebut, ketika diberikan kondisi awal $\theta_{10} \neq \theta_{20}$, Gambar 3c memperlihatkan lintasan fase berbentuk elips yang terpilin. Pola ini menunjukkan bahwa dinamika sistem menjadi lebih kompleks akibat interaksi dan pertukaran energi yang berlangsung secara terus-menerus antara kedua bandul.

4 KESIMPULAN

Untuk sembarang sudut dengan nilai sudut awal sama, bentuk gerak bandul terdang adalah *in phase* dan untuk sembarang sudut dengan nilai sudut awal berkebalikan, gerak bandul terdang akan menjadi *out of phase*. Program komputasi yang digunakan dalam penelitian ini cukup akurat untuk digunakan menganalisis gerak bandul terdang pada sudut sebarang yang besar.

PENULIS

- 1 Fatimah Ar-Rahma
Dari :
(1) Departemen Fisika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia
- 2 Pekik Nurwantoro
Dari :
(1) Departemen Fisika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia



Jurnal Fisika Indonesia, its website and the articles published are licensed under a [Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/). © Departemen of Physics Universitas Gadjah Mada.

Author details

- ¹ Program Studi Fisika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia, Sekip Utara, Bulaksumur, Sinduadi, Mlati, Kota Yogyakarta, Daerah Istimewa Yogyakarta, Kota Yogyakarta, Indonesia.
- ² Program Studi Fisika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia, Sekip Utara, Bulaksumur, Sinduadi, Mlati, Kota Yogyakarta, Daerah Istimewa Yogyakarta, Kota Yogyakarta, Indonesia.

Pustaka

1. Jain H, Ranjan A, Gupta K. Analysis of Chaos in Double Pendulum. In: International Conference on Emerging Trends in Engineering and Technology. Nagpur: IEEE; 2013. .
2. Bazargan-Lari Y, Eghtesad M, Khoogar A, Mohammad-Zadeh A. Dynamics and Regulation of Locomotion of a Human Swing Leg as a Double-Pendulum Considering Self-Impact Joint Constraint. Journal of Biomedical Physics & Engineering. 2014;4(3):91-102.
3. Graichen K, Zeitz M. Nonlinear Feedforward and Feedback Tracking Control with Input Constraints Solving the Pendubot Swing Up Problem. In: Proceedings of the IFAC World Congress. Prague, Czech Republic; 2005. .

4. Graichen K, Treuer M, Zeitz M. Swing-up of the Double Pendulum on a Cart by Feedforward and Feedback Control with Experimental Validation. *Automatica*. 2007;43(1):63-71.
5. Hesse M, Timmermann J, Hullermeier E, Trachtler A. A Reinforcement Learning Strategy for the Swing-up of the Double Pendulum on a Cart. In: *Procedia Manufacturing*. Hannover; 2018. p. 15-20.
6. Kiyomarsi A, Ataei M, Mirzaeian-Dehkordi B, Ashrafi R. The Mathematical Modeling of a Double-Pendulum System as a Physical Model of Flexible Arm Robot. In: *IEEE Conference Proceedings*. Guangzhou; 2007. .
7. Ndikilar CE, Saleh SI, Hafeez HY, Taura LS. Analytical Calculation of Power Flow between Two Weakly Coupled Pendula and Its Application to an Optical Switch. *International Journal of Theoretical and Mathematical Physics*. 2019;9(2):25-35.
8. Stachowiak T, Okada T. A Numerical Analysis of Chaos in the Double Pendulum. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2006;29(2):417-22.
9. Sun N, Wu Y, Liang X, Fang Y. Nonlinear Stable Transportation Control for Double-Pendulum Shipboard Cranes with Ship-Motion-Induced Disturbances. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2019;66(12):9467-79.
10. Zhou Z, Whiteman C. Motions of a Double Pendulum. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 1996;26(7):1177-91.
11. Jarvis M. Department of Physics; 2016. Accessed: 22 May 2023. https://www2.physics.ox.ac.uk/sites/default/files/2012-09-04/fullnotes_pdf_15169.pdf.
12. Suzuki MS, Suzuki IS. Lecture Note on Coupled Pendulum; 2009. Accessed: 3 July 2022. <https://www.researchgate.net>.
13. Holmes MH. Introduction to Numerical Methods in Differential Equations. New York: Springer; 2007.