

**KEKUATAN TOTAL TAK REGULER SISI GRAF *DOUBLE FAN*  
DAN GRAF-GRAF TERKAIT GRAF *DOUBLE FAN***

**(ON TOTAL EDGE IRREGULARITY STRENGTH OF DOUBLE  
FAN GRAPH AND ITS RELATED GRAPHS)**

HUSNUL KHOTIMAH, YENI SUSANTI

**Abstrak.** Pelabelan graf adalah pemetaan yang membawa elemen-elemen graf ke suatu bilangan (biasanya bilangan bulat positif atau bilangan bulat non-negatif). Misalkan  $G$  adalah suatu graf sederhana, terhubung, dan tidak berarah. Graf  $G$  dapat ditulis dengan  $G = (V(G), E(G))$  dimana  $V(G)$  merupakan himpunan titik tak kosong dan  $E(G)$  merupakan himpunan sisi. Pemetaan  $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ , untuk suatu bilangan bulat  $k$ , disebut dengan pelabelan- $k$  total tak reguler sisi jika setiap dua sisi  $e_1$  dan  $e_2$  yang berbeda, memiliki bobot sisi berbeda, yakni  $wt_f(e_1) \neq wt_f(e_2)$ . Suatu  $k$  minimum sedemikian hingga  $G$  mempunyai pelabelan- $k$  total tak reguler sisi, disimbolkan dengan  $tes(G)$  dan disebut dengan kekuatan total tak reguler sisi graf  $G$ . Pada *paper* ini, akan diberikan nilai dari kekuatan total tak reguler sisi graf *double fan* dan graf-graf yang terkait dengan graf *double fan*, yakni graf *double fan snake*, graf parasut diperumum, dan graf karosel.

*Kata-kata kunci:* Kekuatan total tak reguler sisi, graf *double fan*, graf karosel, graf *double fan snake*, graf parasut diperumum.

**Abstract.** A labeling of a graph is a map that carries some set of graph elements to numbers (most often to the positive or nonnegative integers). Let  $G$  be a simple, connected, and undirected graph. We usually write  $G$  as  $G = (V(G), E(G))$  where  $V(G)$  is the nonempty set of vertices of  $G$  and  $E(G)$  is the set of edges of graph  $G$ . The map  $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ , for some positive integer  $k$ , is called an edge irregular total  $k$ -labeling where each two edges  $e_1$  and  $e_2$ , having distinct weights, that are  $wt_f(e_1) \neq wt_f(e_2)$ . The minimum  $k$  for which  $G$  has an edge irregular total  $k$ -labeling is denoted by  $tes(G)$  and called total edge irregularity strength of graph  $G$ . In this paper, we will provide the total edge irregularity strength of double fan graph and its related graphs, that are double fan snake graph, generalized parachute graph, and carousel graph.

*Keywords:* Total edge irregularity strength, double fan graph, carousel graph, double fan snake graph, generalized parachute graph.

## 1 PENDAHULUAN

Penelitian dalam teori graf terus berkembang tidak hanya dari sisi terapan-nya, melainkan juga dari sisi teorinya. Salah satu topik yang sedang berkembang hingga saat ini adalah pelabelan graf. Misalkan  $G = (V(G), E(G))$  merupakan graf sederhana, terhubung, dan tidak berarah, dimana  $V(G)$  merupakan himpunan titik tak kosong dan  $E(G)$  merupakan himpunan sisi. Menurut Wallis [9], pelabelan graf merupakan pemetaan (fungsi) yang membawa elemen-elemen graf ke suatu bilangan (biasanya bilangan bulat positif atau bilangan bulat non-negatif). Domain dari fungsi tersebut biasanya himpunan titik (pelabelan ini disebut pelabelan titik), himpunan sisi (pelabelan ini disebut pelabelan sisi), dan gabungan himpunan titik dan himpunan sisi (pelabelan ini disebut pelabelan total).

Misalkan  $e$  adalah suatu sisi yang menghubungkan titik  $x$  dan  $y$ , maka  $e$  dapat ditulis  $e = xy$ . Wallis [9] juga mendefinisikan bobot sisi  $e = xy$  dengan suatu pelabelan total  $f : V(G) \cup E(G) \mapsto \{1, 2, \dots, k\}$  sebagai berikut:

$$wt_f(e) = wt_f(xy) = f(x) + f(xy) + f(y).$$

Dengan memanfaatkan definisi bobot sisi, Bača dkk. [1] mendefinisikan suatu jenis pelabelan yang disebut pelabelan- $k$  total tak reguler sisi. Suatu pelabelan  $f$  dikatakan pelabelan- $k$  total tak reguler sisi jika untuk setiap dua sisi  $e_1$  dan  $e_2$  yang berbeda, memiliki bobot sisi berbeda, yakni  $wt_f(e_1) \neq wt_f(e_2)$ . Lebih lanjut, minimum nilai  $k$  sedemikian hingga  $G$  mempunyai pelabelan- $k$  total tak reguler sisi, disimbolkan dengan  $tes(G)$  dan disebut dengan kekuatan total tak reguler sisi graf  $G$ .

Bača dkk. [1] juga menemukan batas bawah pada  $tes(G)$  untuk sebarang graf  $G = (V(G), E(G))$ , yaitu sebagai berikut:

$$tes(G) \geq maks \left\{ \left\lceil \frac{|E(G)| + 2}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{\Delta(G) + 1}{2} \right\rceil \right\} \quad (1.1)$$

dimana  $\Delta(G)$  merupakan derajat maksimum di  $G$ .

Berdasarkan batas bawah yang diberikan oleh Bača dkk. [1], Ivančo dan Jendrol [4] menduga nilai kekuatan total tak reguler sisi untuk sebarang graf adalah sebagai berikut:

**Konjektur 1.1.** *Misalkan  $G = (V(G), E(G))$  adalah sebarang graf, maka*

$$tes(G) = maks \left\{ \left\lceil \frac{|E(G)| + 2}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{\Delta(G) + 1}{2} \right\rceil \right\}. \quad (1.2)$$

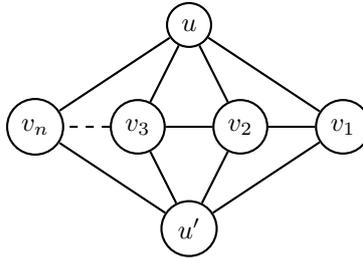
Persamaan (1.2) belum dapat dibuktikan kebenarannya untuk sebarang graf. Dengan demikian, banyak peneliti yang mencoba membuktikan Konjektur 1.1 untuk suatu graf khusus. Contohnya, Ivančo dan Jendrol [4] membuktikan bahwa Konjektur 1.1 benar untuk graf pohon, sementara Jendrol, Miskuf, dan Sotak [5]

juga membuktikan konjektur tersebut pada graf lengkap dan graf bipartit lengkap. Contoh lainnya, Indriati dkk. [3] meneliti *tes* graf web dan graf-graf terkait, Putra dan Susanti [7] meneliti graf theta seragam terpusat, dan Susanti dkk. [8] meneliti graf *staircase* dan graf-graf terkait. Selain itu, untuk melihat graf-graf yang telah dibuktikan nilai kekuatan total tak reguler sisinya, dapat dilihat pada survey yang dilakukan oleh Gallian [2].

Selain daripada pelabelan total tak reguler sisi, masih banyak jenis lain dari pelabelan graf. Salah satunya adalah pelabelan  $k$ -kordial pada graf *fan* dan *double fan* sebagaimana yang diteliti oleh Modha dan Kanani [6]. Oleh sebab itu, pada *paper* ini, akan diberikan nilai dari kekuatan total tak reguler sisi graf *double fan* dan graf-graf yang terkait dengan graf *double fan*, yakni graf *double fan snake*, graf parasut diperumum, dan graf karosel.

## 2 GRAF *DOUBLE FAN*

Berdasarkan Weisstein [10], graf *fan*  $f_{n',n}$  merupakan graf yang didefinisikan sebagai hasil operasi *joint*  $K_{n'} \vee P_n$  dimana  $K_{n'}$  merupakan graf *null* dengan  $n'$  titik dan  $P_n$  merupakan graf *path* dengan  $n$  titik. Untuk kasus  $n' = 1$ , graf  $f_{1,n}$  disebut graf *fan*, sementara untuk kasus  $n' = 2$ , graf  $f_{2,n}$  disebut graf *double fan*. Dengan demikian, pada *paper* ini, graf *double fan* dinotasikan  $f_{2,n}$  dan digambarkan seperti pada Gambar 1. Pada Gambar 1, terlihat bahwa  $V(f_{2,n}) =$



GAMBAR 1. Graf *Double Fan*

$\{u, u', v_i | 1 \leq i \leq n\}$  merupakan himpunan titik graf  $f_{2,n}$  dan  $f_{2,n}$  memiliki sebanyak  $n + 2$  titik dan  $3n - 1$  sisi. Lebih lanjut, berikut ini diberikan teorema mengenai kekuatan total tak reguler sisi dari graf *double fan*.

**Teorema 2.1.** *Misalkan  $f_{2,n}$ ,  $n \geq 1$  merupakan graf *double fan*, maka*

$$tes(f_{2,n}) = n + 1.$$

**Bukti.** Diketahui bahwa untuk  $n \geq 1$ ,  $tes(f_{2,n}) \geq \left\lceil \frac{|E(f_{2,n})|+2}{3} \right\rceil$ .

Kemudian, akan ditunjukkan bahwa terdapat pelabelan- $k$  total tak reguler sisi dengan  $k = \left\lceil \frac{|E(f_{2,n})|+2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{3n+1}{3} \right\rceil = n + 1$ .

Dikonstruksikan pelabelan total  $f$  sebagai berikut:

$$f(u) = 1$$

$$f(u') = n + 1$$

$$f(v_i) = i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f(uv_i) = 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f(v_i v_{i+1}) = n - i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1$$

$$f(v_i u') = n, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

Oleh sebab label dari titik dan sisi, paling besar adalah  $k = n + 1$ , dapat disimpulkan bahwa  $f$  adalah pelabelan- $k$  total.

Lebih lanjut, untuk menunjukkan bahwa  $f$  merupakan pelabelan- $k$  total tak reguler sisi, maka akan ditunjukkan bahwa setiap bobot dari sisi yang berbeda, juga berbeda. Diperoleh bobot dari semua sisi  $f_{2,n}$  adalah sebagai berikut:

$$wt_f(uv_i) = 2 + i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$wt_f(v_i v_{i+1}) = n + i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1$$

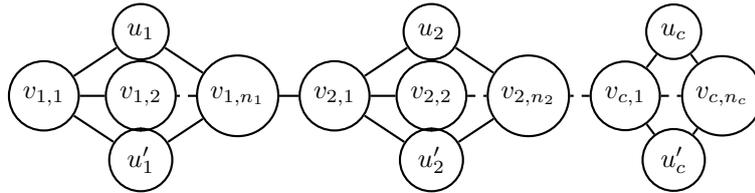
$$wt_f(v_i u') = 2n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

Bobot-bobot sisi  $f_{2,n}$  membentuk barisan bilangan bulat dari 3 sampai dengan  $3n + 1$ . Oleh karena  $f$  merupakan pelabelan- $k$  total dan untuk setiap dua sisi yang berbeda, bobot sisinya juga berbeda, artinya  $f$  merupakan pelabelan- $k$  total tak reguler sisi, dengan label terbesarnya adalah  $k = n + 1$ .

Jadi, terbukti bahwa untuk  $n \geq 1$ ,  $tes(f_{2,n}) = n + 1$ .  $\square$

### 3 GRAF DOUBLE FAN SNAKE

Graf *double fan snake* dinotasikan dengan  $f_{2,n_1} f_{2,n_2} \dots f_{2,n_c}$ , dengan  $n_i \geq 1$  untuk  $1 \leq i \leq c$ ,  $c \geq 2$ , merupakan bilangan bulat dan  $f_{2,n_i}$  masing-masing merupakan graf *double fan*. Graf *double fan snake* adalah graf yang memuat sebanyak  $c$  graf *double fan*. Gambar graf *double fan snake* dapat dilihat pada Gambar 2.



GAMBAR 2. Graf *double fan snake*

Berdasarkan Gambar 2, terlihat bahwa:

- (i).  $V(f_{2,n_1} f_{2,n_2} \dots f_{2,n_c}) = \{u_i, u'_i, v_{i,j_i} | 1 \leq i \leq c, 1 \leq j_i \leq n_i\}$ ,
- (ii).  $|V(f_{2,n_1} f_{2,n_2} \dots f_{2,n_c})| = 2c + \sum_{i=1}^c n_i$ , dan
- (iii).  $|E(f_{2,n_1} f_{2,n_2} \dots f_{2,n_c})| = \sum_{i=1}^c 3n_i - 1$ .

Untuk kekuatan total tak reguler sisi graf *double fan snake*, diberikan pada teorema sebagai berikut:

**Teorema 3.1.** Misalkan  $f_{2,n_1}f_{2,n_2}\dots f_{2,n_c}$ ,  $c, n_i \geq 1$  untuk  $1 \leq i \leq c$ ,  $c \geq 2$ , merupakan graf *double fan snake*, maka

$$tes(f_{2,n_1}f_{2,n_2}\dots f_{2,n_c}) = \sum_{i=1}^c n_i + 1$$

**Bukti.** Secara umum, diketahui bahwa  $|E(f_{2,n_1}f_{2,n_2}\dots f_{2,n_c})| = \sum_{i=1}^c 3n_i - 1$ , sehingga:

$$maks \left\{ \left\lceil \frac{|E(f_{2,n_1}f_{2,n_2}\dots f_{2,n_c})| + 2}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{\Delta(f_{2,n_1}f_{2,n_2}\dots f_{2,n_c}) + 1}{2} \right\rceil \right\} = \sum_{i=1}^c n_i + 1,$$

akibatnya, berdasarkan (1.1), diperoleh  $tes(f_{2,n_1}f_{2,n_2}\dots f_{2,n_c}) \geq \sum_{i=1}^c n_i + 1$ .

Untuk menunjukkan bahwa  $tes(f_{2,n_1}f_{2,n_2}\dots f_{2,n_c}) = \sum_{i=1}^c n_i + 1$ , cukup dengan menunjukkan bahwa terdapat pelabelan- $k$  total tak reguler sisi dari graf *double fan snake*, dengan  $k = \sum_{i=1}^c n_i + 1$ .

Dikonstruksikan pelabelan total  $g$  sebagai berikut:

$$g(u_1) = 1.$$

$$g(u_i) = 1 + \sum_{p=2}^i n_{p-1}, \text{ untuk } 2 \leq i \leq c.$$

$$g(u'_i) = 1 + \sum_{p=1}^i n_p, \text{ untuk } 1 \leq i \leq c.$$

$$g(v_{i,j_i}) = \begin{cases} j_1, & \text{untuk } i = 1, 1 \leq j_1 \leq n_1 \\ j_i + \sum_{p=2}^i n_{p-1}, & \text{untuk } 2 \leq i \leq c, 1 \leq j_i \leq n_i \end{cases}.$$

$$g(u_1v_{1,j_1}) = 1, \text{ untuk } 1 \leq j_1 \leq n_1.$$

$$g(u_iv_{i,j_i}) = 1 + \sum_{p=2}^i n_{p-1}, \text{ untuk } 2 \leq i \leq c, 1 \leq j_i \leq n_i.$$

$$g(v_{i,j_i}v_{i,j_i+1}) = 1 - j_i + \sum_{p=1}^i n_p, \text{ untuk } 1 \leq i \leq c, 1 \leq j_i \leq n_i - 1.$$

$$g(v_{i,n_i}v_{i+1,1}) = 1 + \sum_{p=1}^i n_p, \text{ untuk } 1 \leq i \leq c - 1.$$

$$g(v_{ij_i}u'_i) = \sum_{p=1}^i n_p, \text{ untuk } 1 \leq i \leq c, 1 \leq j_i \leq n_i.$$

Jelas bahwa label titik dan sisi dengan pelabelan  $g$ , mempunyai label paling besar  $k = \sum_{i=1}^c n_i + 1$ . Oleh sebab itu, diperoleh  $g$  merupakan pelabelan- $k$  total dengan label terbesarnya adalah  $k = \sum_{i=1}^c n_i + 1$ .

Selanjutnya, untuk melihat apakah  $g$  merupakan pelabelan- $k$  total tak reguler sisi, perlu dihitung bobot-bobot sisi dari graf *double fan snake*.

$$wt_g(u_1v_{1,j_1}) = 2 + j_1, \text{ untuk } 1 \leq j_1 \leq n_1.$$

$$wt_g(v_{1,j_1}v_{1,j_1+1}) = j_1 + n_1 + 2, \text{ untuk } 1 \leq j_1 \leq n_1 - 1.$$

$$wt_g(v_{1,j_1}u'_1) = 2n_1 + j_1 + 1, \text{ untuk } 1 \leq j_1 \leq n_1.$$

$$wt_g(u_iv_{i,j_i}) = j_i + 2 + 3 \sum_{p=2}^i n_{p-1}, \text{ untuk } 2 \leq i \leq c, 1 \leq j_i \leq n_i.$$

$$wt_g(v_{i,j_i}v_{i,j_i+1}) = j_i + n_i + 2 + 3 \sum_{p=2}^i n_{p-1}, \text{ untuk } 2 \leq i \leq c, 1 \leq j_i \leq n_i - 1.$$

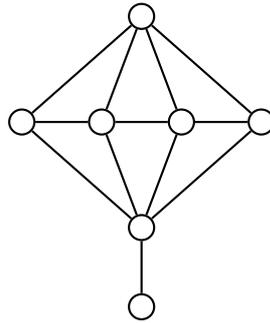
$$wt_g(v_{i,j_i}u'_i) = j_i + 2n_i + 1 + 3 \sum_{p=2}^i n_{p-1}, \text{ untuk } 2 \leq i \leq c, 1 \leq j_i \leq n_i.$$

$$wt_g(v_{i,n_i}v_{i+1,1}) = 2 + 3 \sum_{p=1}^i n_p, \text{ untuk } 1 \leq i \leq c - 1.$$

Terlihat bahwa tidak ada perulangan bobot dari 3 sampai  $3 \sum_{i=1}^c n_i + 1$ . Hal ini menunjukkan bahwa bobot dari dua sisi yang berbeda, juga berbeda. Dengan kata lain,  $g$  merupakan pelabelan- $k$  total tak reguler sisi. Jadi, terbukti bahwa untuk  $1 \leq i \leq c$ ,  $c \geq 2$ ,  $tes(f_{2,n_1} f_{2,n_2} \dots f_{2,n_c}) = \sum_{i=1}^c n_i + 1$ .  $\square$

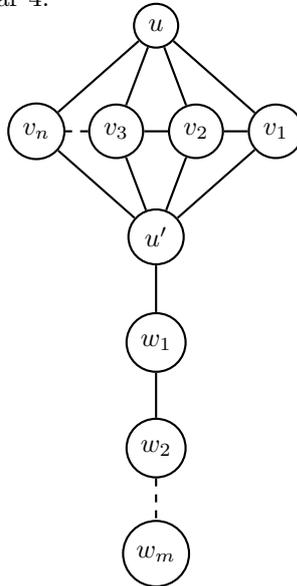
#### 4 GRAF PARASUT DIPERUMUM

Sebelum membahas mengenai graf parasut diperumum, akan diberikan terlebih dahulu definisi graf parasut. Berdasarkan Weisstein [11], graf parasut adalah graf dengan 7 titik yang diilustrasikan pada Gambar 3.



GAMBAR 3. Graf parasut

Selanjutnya, didefinisikan graf parasut diperumum sebagai graf yang digambarkan seperti pada Gambar 4.



GAMBAR 4. Graf parasut diperumum

Berdasarkan definisi graf *double fan*, diketahui bahwa graf *double fan*  $f_{2,n}$  merupakan graf  $N_2 \vee P_n$ . Pada *paper* ini, graf parasut diperumum dinotasikan dengan  $P_n^m$ , yang mana  $n$ , merupakan banyaknya titik pada graf *path*  $P_n$  dan  $m$  merupakan panjang *path* lurus yang ditambahkan di bawah graf *double fan* tersebut. Kemudian, berdasarkan Gambar 4 diperoleh bahwa:

- (i).  $V(P_n^m) = \{u, u', v_i, w_j | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ ,
- (ii).  $|V(P_n^m)| = n + 2 + m = n + m + 2$ , dan
- (iii).  $|E(P_n^m)| = 3n - 1 + m = 3n + m - 1$ .

Untuk kekuatan total tak reguler sisi graf  $P_n^m$ , diberikan pada Teorema 4.1.

**Teorema 4.1.** *Misalkan  $P_n^m$ ,  $m, n \geq 1$  merupakan graf parasut diperumum, maka*

$$tes(P_n^m) = \left\lceil \frac{3n + m + 1}{3} \right\rceil.$$

**Bukti.** Berdasarkan (1.1), untuk  $n \geq 1$ , diperoleh bahwa

$$tes(P_n^m) \geq maks \left\{ \left\lceil \frac{|E(P_n^m)| + 2}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{\Delta(P_n^m) + 1}{2} \right\rceil \right\} = \left\lceil \frac{3n + m + 1}{3} \right\rceil.$$

Dengan kata lain,  $tes(P_n^m) \geq \left\lceil \frac{|E(P_n^m)| + 2}{3} \right\rceil$ .

Ditunjukkan bahwa terdapat pelabelan- $k$  total tak reguler sisi dengan dimisalkan bahwa  $k = \left\lceil \frac{|E(P_n^m)| + 2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{3n + m + 1}{3} \right\rceil$ . Kemudian, dikonstruksikan pelabelan total  $h$  sebagai berikut:

$$h(u) = 1.$$

$$h(u') = n + 1.$$

$$h(v_i) = i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

$$h(w_i) = n + 1 + \lfloor \frac{i-1}{3} \rfloor, \text{ untuk } 1 \leq i \leq m.$$

$$h(uv_i) = 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

$$h(v_i v_{i+1}) = n - i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1.$$

$$h(v_i u') = n, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

$$h(u' w_1) = n.$$

$$h(w_i w_{i+1}) = n + 1 + \lfloor \frac{i+1}{3} \rfloor, \text{ untuk } 1 \leq i \leq m - 1.$$

Pada pelabelan total  $h$ , tidak ada label yang lebih besar dari  $n + \lceil \frac{m+1}{3} \rceil$  atau  $\lceil \frac{3n+m+1}{3} \rceil$ . Oleh sebab  $n + 1 + \lfloor \frac{m}{3} \rfloor = n + \lceil \frac{m+1}{3} \rceil$ , maka  $k = \lceil \frac{3n+m+1}{3} \rceil$  merupakan label terbesar pada pelabelan total  $h$ . Ini menunjukkan bahwa  $h$  merupakan pelabelan- $k$  total.

Selanjutnya, dihitung bobot-bobot sisi graf  $P_n^m$  dengan pelabelan  $h$  sebagai berikut:

$$wt_h(uv_i) = 2 + i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

$$wt_h(v_i v_{i+1}) = n + i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1.$$

$$wt_h(v_i u') = 2n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

$$wt_h(u'w_1) = 3n + 2.$$

$$wt_h(w_i w_{i+1}) = 3n + 3 + \lfloor \frac{i-1}{3} \rfloor + \lfloor \frac{i+1}{3} \rfloor + \lfloor \frac{i}{3} \rfloor, \text{ untuk } 1 \leq i \leq m-1.$$

Untuk  $i = 1 \pmod 3$ , misalkan  $i = 3a + 1$  untuk suatu  $a \in \mathbb{Z}^+$ , dapat diperoleh bahwa:

$$\lfloor \frac{i-1}{3} \rfloor + \lfloor \frac{i+1}{3} \rfloor + \lfloor \frac{i}{3} \rfloor = i - 1$$

Untuk  $i = 2 \pmod 3$ , misalkan  $i = 3a + 2$  untuk suatu  $a \in \mathbb{Z}^+$ , diperoleh:

$$\lfloor \frac{i-1}{3} \rfloor + \lfloor \frac{i+1}{3} \rfloor + \lfloor \frac{i}{3} \rfloor = i - 1$$

Untuk  $i = 0 \pmod 3$ , misalkan  $i = 3a$  untuk suatu  $a \in \mathbb{Z}^+$ , diperoleh:

$$\lfloor \frac{i-1}{3} \rfloor + \lfloor \frac{i+1}{3} \rfloor + \lfloor \frac{i}{3} \rfloor = i - 1$$

Oleh karena  $\lfloor \frac{i-1}{3} \rfloor + \lfloor \frac{i+1}{3} \rfloor + \lfloor \frac{i}{3} \rfloor = i - 1$ , menyebabkan

$$\begin{aligned} wt_h(w_i w_{i+1}) &= 3n + 3 + \lfloor \frac{i-1}{3} \rfloor + \lfloor \frac{i+1}{3} \rfloor + \lfloor \frac{i}{3} \rfloor \\ &= 3n + i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq m-1. \end{aligned}$$

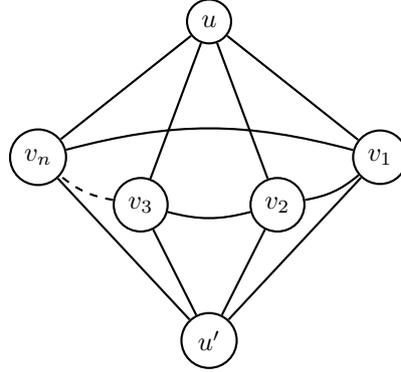
Berdasarkan formula bobot yang diperoleh di atas, dapat terlihat bahwa tidak ada perulangan bobot sisi pada pelabelan total  $h$ , yang mana bobot sisinya membentuk barisan bilangan bulat dari 3 sampai  $3n+m+1$ . Hal ini menunjukkan bahwa untuk setiap sisi graf  $P_n^m$  yang berbeda, juga memiliki bobot sisi yang berbeda. Selain itu juga telah ditunjukkan bahwa  $h$  merupakan pelabelan- $k$  total tak reguler sisi dengan  $k = \lceil \frac{3n+m+1}{3} \rceil$ . Jadi, dapat disimpulkan bahwa  $h$  merupakan pelabelan- $k$  total tak reguler sisi graf  $P_n^m$ .

Diperoleh suatu  $k$  minimum, yakni  $k = \lceil \frac{3n+m+1}{3} \rceil$ , sedemikian sehingga graf  $P_n^m$  memiliki pelabelan- $k$  total tak reguler sisi. Dalam kasus ini, pelabelan total tak reguler sisinya adalah  $h$ .

Dengan demikian, terbukti bahwa untuk  $m, n \geq 1$ ,  $tes(P_n^m) = \lceil \frac{3n+m+1}{3} \rceil$ .  $\square$

## 5 GRAF KAROSEL

Gagasan mengenai graf karosel didapatkan dari graf *double fan*, yakni dengan mengganti *path* pada graf *double fan* dengan suatu *cycle*. Berdasarkan hal tersebut, didefinisikan graf karosel sebagai join dari graf *null* dengan 2 titik (graf  $N_2$ ) dan graf *cycle* dengan  $n$  titik (graf  $C_2$ ). Namun demikian, terdapat satu syarat untuk graf karosel agar graf tersebut merupakan graf sederhana, yakni  $n \geq 3$ . Sebab apabila  $n = 1$ , maka graf tersebut akan memuat *loop* dan apabila  $n = 2$ , maka graf tersebut akan memuat sisi ganda. Graf karosel ini kemudian dinotasikan dengan  $NC_{2,n}$ , sedemikian sehingga  $NC_{2,n} = N_2 \vee C_n$ . Graf karosel digambarkan seperti pada Gambar 5.



GAMBAR 5. Graf karosel

Sama halnya dengan graf *double fan*, graf karosel juga memiliki sebanyak  $n + 2$  titik, yakni  $V(NC_{2,n}) = \{u, u', v_i | 1 \leq i \leq n\}$ . Sementara itu, karena pada graf karosel menyebabkan satu tambahan sisi pada graf *double fan*, maka graf karosel memiliki sebanyak  $3n$  sisi. Selain itu, Teorema 2.1 juga berlaku untuk graf karosel. Dengan kata lain, kekuatan total tak reguler sisi graf karosel sama dengan kekuatan total tak reguler sisi graf *double fan*, yakni  $n + 1$ . Jelas bahwa  $n$  bukan merupakan kekuatan total tak reguler sisinya. Sebab untuk graf karosel yang memiliki sebanyak  $3n$  sisi, dengan bobot-bobot sisi yang berbeda yang dimulai dari 3 (bobot ini diperoleh dari dua titik yang berlabel 1 dan satu sisi yang berlabel 1), mengakibatkan setidaknya ada sisi yang memiliki bobot  $3n + 2$ . Namun, apabila label terbesarnya adalah  $n$ , berakibat bobot terbesarnya adalah  $n + n + n = 3n$ . Dengan demikian,  $n$  bukan kekuatan total tak reguler sisi graf karosel.

Lebih lanjut, misalkan  $k = n + 1$ , akan dibuktikan bahwa terdapat pelabelan total tak reguler sisi dengan label terbesarnya adalah  $k$ . Dikonstruksikan pelabelan total  $\theta$  untuk graf karosel sebagai berikut:

$$\theta(u) = 1.$$

$$\theta(u') = n + 1.$$

$$\theta(v_i) = i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

$$\theta(uv_i) = 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

$$\theta(v_i v_{i+1}) = n - i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1.$$

$$\theta(v_n v_1) = n + 1.$$

$$\theta(v_i u') = n + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

Berdasarkan pelabelan total  $\theta$  tersebut di atas, terlihat bahwa label terbesar dari titik dan sisi graf karosel, adalah  $n + 1$ . Dengan demikian, diperoleh bahwa  $\theta$  merupakan pelabelan- $k$  total.

Kemudian, berikut ini merupakan formula dari bobot sisi graf karosel dengan pelabelan- $k$  total  $\theta$ .

$$wt_{\theta}(uv_i) = 2 + i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

$$wt_{\theta}(v_i v_{i+1}) = n + i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1.$$

$$wt_{\theta}(v_n v_1) = 2n + 2.$$

$$wt_{\theta}(v_i u') = 2n + 2 + i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

Oleh karena  $\theta$  merupakan pelabelan- $k$  total, dengan  $k = n+1$  dan untuk setiap sisi yang berbeda di  $E(NC_{2,n})$ , bobot sisinya juga berbeda, maka  $\theta$  merupakan pelabelan- $k$  total tak reguler sisi. Jadi, benar bahwa Teorema 2.1 juga berlaku untuk graf karosel.

## 6 PENUTUP

Berdasarkan Teorema 2.1, Teorema 3.1, dan Teorema 4.1 telah dibuktikan bahwa Konjektur 1.1 benar untuk graf *double fan*, graf *double fan snake*, graf parasut diperumum, dan graf karosel, yang mana kekuatan total tak reguler sisi untuk masing-masing graf tersebut adalah sebagai berikut:

- (i).  $tes(f_{2,n}) = tes(NC_{2,n}) = n + 1$  untuk  $n \geq 3$ ,
- (ii).  $tes(f_{2,n_1} f_{2,n_2} \dots f_{2,n_c}) = \sum_{i=1}^c n_i + 1$  untuk  $1 \leq i \leq c$ ,  $c \geq 2$ , dan
- (iii).  $tes(P_n^m) = \lceil \frac{3n+m+1}{3} \rceil$ , untuk  $m, n \geq 1$ .

## REFERENSI

- [1] Bača, M., Jendrol, S., Miller, M., dan Ryan, J., On Irregular Total Labeling, *Discrete Math* **307** (2007), 1378-1388.
- [2] Gallian, J.A., A Dynamic Survey of Graph Labeling, *The Electronic Journal of Combinatorics* **18** (2015), 247-252.
- [3] Indriati, D., Widodo, Wijayanti, I.E., Sugeng, K.A, dan Bača, M., On Total Edge Irregularity Strength of Generalized Web Graphs and Related Graphs, *Mathematics in Computer Science* **9** (2015), 161-167.
- [4] Ivančo, J. dan Jendrol, S., The total edge irregularity strength of trees, *Discuss. Math. Graph Theory* **26 pp** (2006), 449-456.
- [5] Jendrol, S., Miskuf, J., dan Sotak, R., Total edge irregularity strength of complete graphs and complete bipartite graphs, *Discrete Mathematics* **Volume 310, Issue 3** (2010), 400-407.
- [6] Modha, M.V., dan Kanani K.K., K-cordial Labeling of Fan and Double Fan, *International Journal of Applied Mathematical Research* **2** (2015), 362-369.
- [7] Putra, R.W. dan Susanti, Y., On Total Edge Irregularity Strength of Centralized Uniform Theta Graph, *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics* (2018), 1-7.
- [8] Susanti, Y., Puspitasari, Y.I., dan Khotimah, H., On Total Edge Irregularity Strength of Staircase Graphs and Related Graphs, (submitted), 2017.
- [9] Wallis, W.D., *Magic Graphs*, Birkhäuser, Boston, 2011.
- [10] Weisstein, E.W. Fan Graph. (2008). <http://mathworld.wolfram.com/FanGraph.html> Accessed 16.08.17.
- [11] Weisstein, E.W. Parachute Graph. (2008). <http://mathworld.wolfram.com/ParachuteGraph.html> Accessed 16.08.17.

HUSNUL KHOTIMAH  
Universitas Gadjah Mada  
husnul.khotimah18@mail.ugm.ac.id

YENI SUSANTI  
Universitas Gadjah Mada  
yeni\_math@ugm.ac.id