Jurnal Matematika Thales (JMT): 2020 ISSN: 2715-1891
Vol. 02 No. 02

Subgrup Normal Multi-Fuzzy, Subgrup Normal Multi-Anti Fuzzy, dan Teorema Korespondensi

(Normal Multi-Fuzzy Subgroups, Normal Multi-Anti Fuzzy Subgroups, and Correspondence Theorem)

AMALUDDIN*, BUDI SURODJO

Abstract. In any group, we can form normal multi-fuzzy subgroups and normal multi-anti fuzzy subgroups. In this paper, we investigate the properties of normal multi-fuzzy subgroups and normal multi-anti fuzzy subgroups. Based on these structures, we construct the factor groups relative to a normal multi-fuzzy subgroup or normal multi-anti fuzzy subgroup. Furthermore, we prove that if $f : G_1 \to G_2$ is an epimorphism of groups, then there is a one-to-one correspondence between the normal multi-anti fuzzy subgroups of G_2 and those of G_1 which are constant on the kernel of f. Finally, by using the epimorphism f, we give a group isomorphism between two factor groups relative to a normal multi-anti fuzzy subgroup.
Keywords: Multi-fuzzy subgroup, multi-anti fuzzy subgroup, normal multi-fuzzy subgroup, normal multi-anti fuzzy subgroup, multi-fuzzy coset.

Abstrak. Pada sebarang grup dapat dibentuk subgrup normal multi-fuzzy dan subgrup normal multi-anti fuzzy. Pada tulisan ini, dikaji sifat-sifat subgrup normal multi-fuzzy dan subgrup normal multi-anti fuzzy. Berdasarkan struktur tersebut, dikonstruksi grup faktor relatif terhadap subgrup normal multi-fuzzy atau subgrup normal multi-anti fuzzy. Lebih lanjut, dibuktikan bahwa jika $f : G_1 \to G_2$ merupakan epimorfisma grup, maka terdapat korespondensi satu-satu antara subgrup-subgrup normal multi-anti fuzzy pada G_2 dan pada G_1 yang bernilai konstan pada kernel f. Terakhir, dengan menggunakan epimorfisma f, diberikan suatu isomorfisma grup antara dua grup faktor relatif terhadap subgrup normal multi-anti fuzzy.
Kata-kata kunci: Subgrup multi-fuzzy, subgrup multi-anti fuzzy, subgrup normal multi-fuzzy, subgrup normal multi-anti fuzzy, koset multi-fuzzy.

2010 Mathematics Subject Classification: 20N25, 03E72, 08A72

1. PENDAHULUAN

Himpunan fuzzy diperkenalkan oleh Lothfi A. Zadeh [12] pada tahun 1965. Dengan menggunakan himpunan tersebut, Rosenfeld [9] memperkenalkan konsep grup fuzzy. Perkembangan konsep grup fuzzy ini menghasilkan konsep-konsep baru, antara lain subgrup anti fuzzy [1], subgrup normal fuzzy dan koset fuzzy [3], dan grup faktor relatif terhadap subgrup normal fuzzy [2].

Pada tahun 2010, Sabu Sebastian dan T.V. Ramakrishnan [10] memperkenalkan konsep himpunan multi-fuzzy. Konsep ini merupakan perumuman dari teori himpunan fuzzy. Dengan menerapkan konsep himpunan multi-fuzzy pada suatu grup, Sabu dan Ramakrishnan [11] memunculkan konsep subgrup multi-fuzzy dan subgrup normal multi-fuzzy. Sifat-sifat subgrup multi-fuzzy dan subgrup multi-anti fuzzy diselidiki oleh Muthuraj dan Balamurugan [4,5].

Subgrup multi-fuzzy dikatakan normal jika memenuhi aksioma tertentu. Begitu pula dengan subgrup multi-anti fuzzy yang dapat dikatakan normal jika memenuhi aksioma tertentu. Konsep subgrup normal multi-fuzzy dan subgrup normal multi-anti fuzzy dibahas oleh Muthuraj dan Balamurugan [6]. Pada tulisan ini dibahas sifat subgrup normal multi-fuzzy dan subgrup normal multi-anti fuzzy yang berkaitan dengan grup komutatif.

Koset multi-fuzzy dapat dibangun dari subgrup normal multi-fuzzy atau subgrup normal multi-anti fuzzy [7,8]. Koset multi-fuzzy tersebut dapat membentuk suatu grup faktor. Muthuraj dan Balamurugan [7] mengonstruksi grup faktor relatif terhadap subgrup normal multi-anti fuzzy. Pada tulisan ini dikonstruksi grup faktor relatif terhadap subgrup normal multi-fuzzy. Lebih lanjut, Teorema Korespondensi yang berkaitan dengan subgrup normal multi-anti fuzzy dipelajari oleh Muthuraj dan Balamurugan [7]. Pada tulisan ini diberikan sifat yang berkaitan dengan Teorema Korespondensi tersebut.

2. HIMPUNAN MULTI-FUZZY PADA GRUP

Pada bagian ini dibahas konsep himpunan multi-fuzzy pada suatu grup, subgrup multi-fuzzy, dan subgrup multi-anti fuzzy.

Definisi 2.1. [12] *Diberikan sebarang grup G. Himpunan bagian fuzzy μ pada G merupakan pemetaan $\mu : G \to [0,1]$.*

Definisi 2.2. [10] *Diberikan sebarang grup G. Himpunan multi-fuzzy A pada G didefinisikan sebagai*

$$A = \{(x, \mu_1(x), \mu_2(x), \cdots, \mu_i(x), \cdots) : x \in G\}$$

dengan $\mu_i : G \to [0,1]$ untuk setiap i.

Contoh 2.3. *Diberikan grup* $(\mathbb{Z}, +)$. *Pada* $\mathbb{Z}$ *didefinisikan fungsi* $\mu_i : \mathbb{Z} \to [0, 1]$, *sehingga*

$$\mu_i(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x-i} & ; x = -2, -3, ... \\ 0 & ; x = -1, 0, 1 \\ \frac{1}{x+i} & ; x =, 2, 3, ... \end{cases}$$

dengan $x \in \mathbb{Z}$ *dan* $i = 1, 2, 3, \cdots$. *Dibentuk himpunan barisan terurut*

$$A = \{(x, \mu_1(x), \mu_2(x), \cdots, \mu_i(x), \cdots) : x \in \mathbb{Z}\}.$$

Oleh karena itu, dapat dilihat bahwa A *merupakan himpunan multi-fuzzy pada* $\mathbb{Z}$.

Jika barisan fungsi-fungsi keanggotaan pada A hanya sebanyak k (sebanyak berhingga), maka k dikatakan sebagai dimensi dari A. Fungsi keanggotaan multi-fuzzy μ_A merupakan fungsi dari G ke $[0, 1]^k$, sehingga untuk setiap $x \in G$ berlaku

$$\mu_A(x) = (\mu_1(x), \mu_2(x), \cdots, \mu_k(x)).$$

Untuk menyederhanakan penulisan, himpunan multi-fuzzy

$$A = \{(x, \mu_1(x), \mu_2(x), \cdots, \mu_k(x)) : x \in G\}$$

dapat ditulis sebagai

$$A = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k).$$

Definisi 2.4. [10] *Diberikan himpunan-himpunan multi-fuzzy* A *dan* B *pada grup* G, *dengan* $A = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k)$ *dan* $B = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_k)$. *Didefinisikan relasi dan operasi berikut.*

(1) $A \sqsubseteq B$ *jika dan hanya jika* $\mu_i(x) \leq \nu_i(x)$ *untuk setiap* $x \in X$ *dan* $i = 1, 2, \cdots, k$.
(2) $A = B$ *jika dan hanya jika* $\mu_i(x) = \nu_i(x)$ *untuk setiap* $x \in X$ *dan* $i = 1, 2, \cdots, k$.
(3) $A \sqcup B = (\mu_1 \cup \nu_1, \mu_2 \cup \nu_2, \cdots, \mu_k \cup \nu_k)$
$= \{(x, max\{\mu_1(x), \nu_1(x)\}, max\{\mu_2(x), \nu_2(x)\}, \cdots, max\{\mu_k(x), \nu_k(x)\}) : x \in G\}$.
(4) $A \sqcap B = (\mu_1 \cap \nu_1, \mu_2 \cap \nu_2, \cdots, \mu_k \cap \nu_k)$
$= \{(x, min\{\mu_1(x), \nu_1(x)\}, min\{\mu_2(x), \nu_2(x)\}, \cdots, min\{\mu_k(x), \nu_k(x)\}) : x \in G\}$.

Definisi 2.5. [10] *Diberikan himpunan multi-fuzzy* $A = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k)$ *pada grup* G. *Misalkan* μ_i^C *merupakan komplemen fuzzy dari himpunan fuzzy* μ_i, *untuk* $i = 1, 2, \cdots, k$. *Komplemen multi-fuzzy dari himpunan multi-fuzzy* A *adalah himpunan multi-fuzzy* $(\mu_1^C, \mu_2^C, \cdots, \mu_k^C)$ *dan dinotasikan oleh* $C(A)$ *atau* A^C. *Oleh karena itu,*

$$\begin{aligned} A^C &= \{(x, \mu_1^C(x), \mu_2^C(x), \cdots, \mu_k^C(x)) : x \in G\} \\ &= \{(x, 1 - \mu_1(x), 1 - \mu_2(x), \cdots, 1 - \mu_k(x)) : x \in G\}. \end{aligned}$$

Definisi 2.6. [1] *Misalkan* μ *merupakan himpunan bagian fuzzy pada grup* G. *Komplemen dari himpunan* μ, *dinotasikan dengan* μ^C, *merupakan himpunan bagian fuzzy pada* G *yang didefinisikan sebagai* $\mu^C(g) = 1 - \mu(g)$, *untuk setiap* $g \in G$.

Misalkan A merupakan himpunan multi-fuzzy pada grup G dengan elemen identitas e. Himpunan A_* menotasikan himpunan $\{x \in G | A(x) = A(e)\}$.

Definisi 2.7. [9] *Misalkan μ merupakan himpunan bagian fuzzy pada grup G. Himpunan μ dinamakan sebagai subgrup fuzzy pada G jika untuk setiap $x, y \in G$ memenuhi:*

(1) $\mu(xy) \geq min\{\mu(x), \mu(y)\}$.
(2) $\mu(x^{-1}) = \mu(x)$.

Definisi 2.8. [11] *Himpunan multi-fuzzy A pada grup G dinamakan subgrup multi-fuzzy pada G jika untuk setiap $x, y \in G$ berlaku:*

(1) $A(xy) \geq min\{A(x), A(y)\}$.
(2) $A(x^{-1}) = A(x)$.

Contoh 2.9. *Diberikan grup $K = \langle a, b | a^2 = b^2 = (ab)^2 = e \rangle$. Didefinisikan pemetaan $\mu_i : K \to [0, 1]$, dengan*

$$\mu_i(x) = \begin{cases} \frac{0.8}{i} & ; x = e \\ \frac{0.4}{i} & ; x = a \\ \frac{0.2}{i} & ; x = b \\ \frac{0.2}{i} & ; x = ab \end{cases}$$

untuk setiap $x \in K$ dan setiap $i = 1, 2, \cdots, 20$. Dibentuk himpunan multi-fuzzy

$$A = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{20}).$$

Jelas bahwa $\mu_i(xy) \geq min\{\mu_i(x), \mu_i(y)\}$ dan $\mu_i(x^{-1}) = \mu_i(x)$, untuk setiap $x, y \in K$ dan $i = 1, 2, \cdots, 20$. Jadi, $A(xy) \geq min\{A(x), A(y)\}$ dan $A(x^{-1}) = A(x)$, untuk setiap $x, y \in K$. Dengan demikian, A merupakan subgrup multi-fuzzy pada K.

Definisi 2.10. [1] *Diberikan himpunan bagian fuzzy μ pada grup G. Himpunan μ dinamakan subgrup anti fuzzy pada G jika untuk setiap $x, y \in G$ memenuhi:*

(1) $\mu(xy) \leq max\{\mu(x), \mu(y)\}$.
(2) $\mu(x^{-1}) = \mu(x)$.

Definisi 2.11. [5] *Himpunan multi-fuzzy B pada grup G dinamakan subgrup multi-anti fuzzy pada G jika untuk setiap $x, y \in G$ berlaku:*

(1) $B(xy) \leq max\{B(x), B(y)\}$.
(2) $B(x^{-1}) = B(x)$.

Contoh 2.12. [5] *Diberikan grup $K = \langle a, b | a^2 = b^2 = (ab)^2 = e \rangle$. Didefinisikan pemetaan $\nu_i : K \to [0, 1]$, dengan*

$$\nu_i(x) = \begin{cases} \frac{0.3}{i} & ; x = e \\ \frac{0.6}{i} & ; x = a \\ \frac{0.9}{i} & ; x = b \\ \frac{0.9}{i} & ; x = ab \end{cases}$$

untuk setiap $x \in K$ dan setiap $i = 1, 2, \cdots, 20$. Dibentuk himpunan multi-fuzzy

$$B = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{20}).$$

Dapat dilihat bahwa $\nu_i(xy) \leq \max\{\nu_i(x), \nu_i(y)\}$ dan $\nu_i(x^{-1}) = \nu_i(x)$, untuk setiap $x, y \in K$ dan $i = 1, 2, \cdots, 20$. Jadi, $B(xy) \leq \max\{B(x), B(y)\}$ dan $B(x^{-1}) = B(x)$, untuk setiap $x, y \in K$. Oleh karena itu, B merupakan subgrup multi-anti fuzzy pada K.

3. SIFAT-SIFAT SUBGRUP MULTI-FUZZY DAN SUBGRUP MULTI-ANTI FUZZY

Pada bagian ini diberikan sifat-sifat yang berlaku pada subgrup multi-fuzzy dan subgrup multi-anti fuzzy.

Misalkan A merupakan subgrup multi-fuzzy pada grup G dengan elemen identitas e. Dapat dilihat bahwa untuk setiap $x \in G$, diperoleh

$$A(x) = \min\{A(x), A(x)\} = \min\{A(x), A(x^{-1})\} \leq A(xx^{-1}) = A(e).$$

Dengan demikian, didapat $A(x) \leq A(e)$, untuk setiap $x \in G$.

Teorema 3.1. [4] *Diberikan subgrup multi-fuzzy A pada grup G dengan elemen identitas e. Himpunan $A_* = \{x \in G | A(x) = A(e)\}$ merupakan subgrup dari G.*

Bukti. Jelas bahwa $A_* \neq \emptyset$, sebab $e \in A_*$. Lebih lanjut, diambil sebarang $x, y \in A_*$. Hal ini berarti $A(x) = A(y) = A(e)$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} A(xy^{-1}) &\geq \min\{A(x), A(y^{-1})\} \\ &= \min\{A(x), A(y)\} \\ &= \min\{A(e), A(e)\} \\ &= A(e). \end{aligned}$$

Jadi, $A(xy^{-1}) \geq A(e)$, untuk sebarang $x, y \in A_*$. Di sisi lain, karena $A(x) \leq A(e)$, untuk setiap $x \in G$, berarti $A(xy^{-1}) \leq A(e)$, untuk sebarang $x, y \in A_*$. Dengan demikian didapatkan $A(xy^{-1}) = A(e)$, untuk sebarang $x, y \in A_*$. Oleh karena itu, $xy^{-1} \in A_*$. Jadi, terbukti A_* merupakan subgrup dari G. □

Teorema 3.2. [4] *Himpunan multi-fuzzy A pada grup G merupakan subgrup multi-fuzzy pada G jika dan hanya jika $A(xy^{-1}) \geq \min\{A(x), A(y)\}$, untuk setiap $x, y \in G$.*

Bukti. Diambil sebarang $x, y \in G$. Diperhatikan bahwa

$$A(xy^{-1}) \geq \min\{A(x), A(y^{-1})\} = \min\{A(x), A(y)\}.$$

Sebaliknya, diambil sebarang $x, y \in G$.

(1) $A(e) = A(xx^{-1}) \geq \min\{A(x), A(x)\} = A(x)$. Jadi, $A(e) \geq A(x)$.
(2) $A(y^{-1}) = A(ey^{-1}) \geq \min\{A(e), A(y)\} = A(y)$. Jadi, $A(y^{-1}) \geq A(y)$. Lebih lanjut, $A(y) = A((y^{-1})^{-1}) = A(e(y^{-1})^{-1}) \geq \min\{A(e), A(y^{-1})\} = A(y^{-1})$. Jadi, $A(y^{-1}) \leq A(y)$. Dengan demikian, didapat $A(y^{-1}) = A(y)$.
(3) $A(xy) = A(x(y^{-1})^{-1}) \geq \min\{A(x), A(y^{-1})\} = \min\{A(x), A(y)\}$. Jadi, didapat $A(xy) \geq \min\{A(x), A(y)\}$.

Oleh karena itu, terbukti A merupakan subgrup multi-fuzzy pada G. □

Teorema 3.3. *Misalkan A dan B masing-masing merupakan subgrup multi-anti fuzzy pada grup G. Gabungan dari A dan B merupakan subgrup multi-anti fuzzy pada G.*

Bukti. Diambil sebarang $x, y \in G$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(A \sqcup B)(xy) &= \max\{A(xy), B(xy)\}\\ &\leq \max\{\max\{A(x), A(y)\}, \max\{B(x), B(y)\}\}\\ &= \max\{\max\{A(x), B(x)\}, \max\{A(y), B(y)\}\}\\ &= \max\{(A \sqcup B)(x), (A \sqcup B)(y)\}.\end{aligned}$$

Lebih lanjut,

$$(A \sqcup B)(x^{-1}) = \max\{A(x^{-1}), B(x^{-1})\} = \max\{A(x), B(x)\} = (A \sqcup B)(x).$$

Jadi, terbukti $(A \sqcup B)$ merupakan subgrup multi-anti fuzzy pada G. □

Misalkan B merupakan subgrup multi-anti fuzzy pada grup G dengan elemen identitas e. Dapat dilihat bahwa untuk setiap $x \in G$, diperoleh

$$B(x) = \max\{B(x), B(x)\} = \max\{B(x), B(x^{-1})\} \geq B(xx^{-1}) = B(e).$$

Dengan demikian, didapat $B(x) \geq B(e)$, untuk setiap $x \in G$.

Teorema 3.4. [5] *Diberikan subgrup multi-anti fuzzy B pada grup G dengan elemen identitas e. Jika $B(xy^{-1}) = B(e)$, maka $B(x) = B(y)$, untuk setiap $x, y \in G$.*

Bukti. Diambil sebarang $x, y \in G$. Diperhatikan bahwa

$$B(x) = B(xe) = B(x(y^{-1}y)) \leq \max\{B(xy^{-1}), B(y)\} = \max\{B(e), B(y)\} = A(y).$$

Jadi, diperoleh $B(x) \leq B(y)$, untuk setiap $x, y \in G$. Di sisi lain,

$$\begin{aligned}B(y) &= B(ye)\\ &= B(y(x^{-1}x))\\ &\leq \max\{B(yx^{-1}), B(x)\}\\ &= \max\{B(xy^{-1}), B(x)\}\\ &= \max\{B(e), B(x)\}\\ &= B(x).\end{aligned}$$

Jadi, diperoleh $B(y) \leq B(x)$, untuk setiap $x, y \in G$. Karena diperoleh $B(x) \leq B(y)$ dan $B(y) \leq B(x)$, berarti terbukti $B(x) = B(y)$, untuk setiap $x, y \in G$. □

Mengacu pada Definisi 2.12, didapatkan syarat perlu dan cukup himpunan multi-fuzzy pada suatu grup merupakan subgrup multi-anti fuzzy. Syarat tersebut dinyatakan dalam sifat berikut.

Teorema 3.5. [5] *Himpunan multi-fuzzy B pada grup G merupakan subgrup multi-anti fuzzy pada G jika dan hanya jika $B(xy^{-1}) \leq \max\{B(x), B(y)\}$, untuk setiap $x, y \in G$.*

4. SUBGRUP NORMAL MULTI-FUZZY DAN SUBGRUP NORMAL MULTI-ANTI FUZZY

Pada bagian ini dibahas konsep dan sifat-sifat subgrup normal multi-fuzzy dan subgrup normal multi-anti fuzzy pada suatu grup.

Definisi 4.1. [6] *Subgrup multi-fuzzy A pada grup G dikatakan normal jika untuk setiap $x \in G$ memenuhi*

$$A(x) \leq \min_{g \in G}\{A(gxg^{-1})\}.$$

Contoh 4.2. *Diberikan subgrup multi-fuzzy A pada grup K seperti pada Contoh 2.9. Dapat dilihat bahwa $x = gxg^{-1}$, untuk setiap $x, g \in K$. Oleh karena itu, dididapat $\mu_i(x) \leq \mu_i(gxg^{-1})$, untuk setiap $x, g \in K$ dan $i = 1, 2, \cdots, 20$. Dengan demikian, untuk setiap $x \in K$, diperoleh $A(x) \leq \min\{A(gxg^{-1})\}$, untuk setiap $g \in K$. Jadi, subgrup multi-fuzzy A merupakan subgrup normal multi-fuzzy pada grup K.*

Jika A merupakan subgrup normal multi-fuzzy pada grup G, maka dapat dilihat bahwa

$$A(x) \leq A(g^{-1}x(g^{-1})^{-1}) = A(g^{-1}xg), \text{ untuk setiap } x, g \in G.$$

Teorema 4.3. [11] *Diberikan subgrup multi-fuzzy A pada grup G. Untuk setiap $x, g \in G$, pernyataan-pernyataan berikut saling ekuivalen.*

(1) *Subgrup multi-fuzzy A merupakan subgrup normal multi-fuzzy pada G.*
(2) $A(x) \leq A(gxg^{-1})$.
(3) $A(x) = A(gxg^{-1})$.
(4) $A(xg) = A(gx)$.

Teorema 4.4. *Diberikan subgrup multi-fuzzy A pada grup G. Jika G merupakan grup komutatif, maka A merupakan subgrup normal multi-fuzzy pada G.*

Bukti. Karena G merupakan grup komutatif, berarti jelas bahwa $x = gxg^{-1}$, sehingga didapat $A(x) = A(gxg^{-1})$, untuk setiap $x, g \in G$. Dengan kata lain, untuk setiap $x \in G$ memenuhi

$$A(x) \leq \min_{g \in G}\{A(gxg^{-1})\}.$$

Jadi, terbukti bahwa A merupakan subgrup normal multi-fuzzy pada G. □

Konvers dari Teorema 4.4 di atas belum tentu berlaku. Contoh penyangkalnya yaitu misalkan pada grup $(S_3, \circ)$ didefinisikan fungsi $\mu_i : S_3 \to [0, 1]$, sehingga

$$\mu_i(x) = \begin{cases} \frac{0,5}{i} & ; x = e \\ 0 & ; x \text{ yang lain} \end{cases}$$

dengan $x \in S_3$ dan $i = 1, 2, 3, \cdots, 20$. Dibentuk himpunan barisan terurut

$$A = \{(x, \mu_1(x), \mu_2(x), \cdots, \mu_{20}(x)) : x \in S_3\}.$$

Jelas bahwa A merupakan himpunan multi-fuzzy pada S_3. Lebih lanjut, dapat dilihat bahwa A merupakan subgrup normal multi-fuzzy pada S_3. Tetapi S_3 bukan grup komutatif.

Teorema 4.5. *Jika A merupakan subgrup normal multi-fuzzy pada grup G, maka $A_* = \{x \in G | A(x) = A(e)\}$ merupakan subgrup normal dari G.*

Bukti. Pada Teorema 3.1 telah dibuktikan bahwa A_* merupakan subgrup dari G. Selanjutnya diambil sebarang $x \in A_*$ dan $y \in G$. Oleh karena itu, $A(x) = A(e)$. Karena A subgrup normal multi-fuzzy pada G, berarti $A(yxy^{-1}) \geq A(x) = A(e)$. Karena $A(yxy^{-1}) \leq A(e) = A(x)$, berarti $A(yxy^{-1}) = A(e)$. Dengan demikian, didapat $yxy^{-1} \in A_*$. Jadi, terbukti bahwa A_* merupakan subgrup normal dari G. □

Definisi 4.6. [6] *Subgrup multi-anti fuzzy B pada grup G dikatakan normal jika untuk setiap $x \in G$ memenuhi*

$$B(x) \geq \max_{g \in G}\{B(gxg^{-1})\}.$$

Contoh 4.7. *Diberikan subgrup multi-anti fuzzy B pada grup K seperti pada Contoh 2.12. Dapat dilihat bahwa $x = gxg^{-1}$, untuk setiap $x, g \in K$. Oleh karena itu, diperoleh $\mu_i(x) \geq \mu_i(gxg^{-1})$, untuk setiap $x, g \in K$ dan $i = 1, 2, \cdots, 20$. Dengan demikian, untuk setiap $x \in K$, didapat $B(x) \geq \max\{B(gxg^{-1})\}$, untuk setiap $g \in K$. Jadi, B merupakan subgrup normal multi-anti fuzzy pada K.*

Teorema 4.8. *Diberikan subgrup multi-anti fuzzy B pada grup G. Untuk setiap $x, g \in G$, pernyataan-pernyataan berikut saling ekuivalen.*

(1) *Subgrup multi-anti fuzzy B merupakan subgrup normal multi-anti fuzzy pada G.*
(2) $B(x) \geq B(gxg^{-1})$.
(3) $B(x) = B(gxg^{-1})$.
(4) $B(xg) = B(gx)$.

Bukti. Diambil sebarang $x, g \in G$. Diperhatikan bahwa
((1) $\Longleftrightarrow$ (2))

$$B(x) \geq \max_{g \in G}\{B(gxg^{-1})\} \text{ jika dan hanya jika } B(x) \geq B(gxg^{-1}).$$

((2) $\Rightarrow$ (3))

$$B(x) \geq B(gxg^{-1}) \geq B(g^{-1}(gxg^{-1})g) = B(x).$$

((3) $\Rightarrow$ (2))
Karena $B(x) = B(gxg^{-1})$, berarti jelas bahwa $B(x) \geq B(gxg^{-1})$.

((3) $\Rightarrow$ (4))

$$B(xg) = B(g(xg)g^{-1}) = B((gx)(gg^{-1})) = B(gx).$$

((4) $\Rightarrow$ (3))

$$B(gxg^{-1}) = B((gx)g^{-1}) = B(g^{-1}(gx)) = B((g^{-1}g)x) = B(x).$$

□

Teorema 4.9. *Diberikan subgrup multi-anti fuzzy B pada grup G. Jika G merupakan grup komutatif, maka B merupakan subgrup normal multi-anti fuzzy pada G.*

Bukti. Diketahui G merupakan grup komutatif. Jelas bahwa $x = gxg^{-1}$, untuk setiap $x, g \in G$. Dengan demikian, didapat $B(x) = B(gxg^{-1})$, untuk setiap $x, g \in G$. Dengan kata lain, untuk setiap $x \in G$ memenuhi

$$B(x) \geq \max_{g \in G}\{B(gxg^{-1})\}.$$

Jadi, terbukti bahwa B merupakan subgrup normal multi-anti fuzzy pada G. □

Konvers dari Teorema 4.9 di atas belum tentu berlaku. Contoh penyangkalnya yaitu misalkan didefinisikan fungsi $\mu_i : S_3 \to [0,1]$, sehingga

$$\mu_i(x) = \begin{cases} \frac{0,3}{i} & ; x = e \\ \frac{0,6}{i} & ; x \text{ yang lain} \end{cases}$$

dengan $x \in S_3$ dan $i = 1, 2, 3, \cdots, 20$. Dibentuk himpunan barisan terurut

$$B = \{(x, \mu_1(x), \mu_2(x), \cdots, \mu_{20}(x)) : x \in S_3\}.$$

Jelas bahwa B merupakan himpunan multi-fuzzy pada S_3. Lebih lanjut, dapat dilihat bahwa B merupakan subgrup normal multi-anti fuzzy pada S_3. Tetapi S_3 bukan grup komutatif.

Jika B merupakan subgrup normal multi-anti fuzzy pada grup G, maka B_* merupakan subgrup normal dari G (Muthuraj dan Balamurugan, 2014).

5. KOSET MULTI-FUZZY DARI SUBGRUP NORMAL MULTI-FUZZY

Pada bagian ini dibahas konsep koset multi-fuzzy dari subgrup normal multi-fuzzy pada suatu grup. Koset multi-fuzzy ini akan digunakan untuk membentuk grup faktor relatif terhadap subgrup normal multi-fuzzy pada suatu grup.

Definisi 5.1. [8] *Misalkan A merupakan subgrup multi-fuzzy pada grup G. Untuk sebarang $a \in G$, didefinisikan $(aA)(x) = A(a^{-1}x)$, untuk setiap $x \in G$, dinamakan sebagai koset multi-fuzzy dari subgrup multi-fuzzy A pada grup G yang ditentukan oleh $a \in G$.*

Diberikan subgrup multi-fuzzy A pada grup G. Misalkan untuk sebarang $x, y \in G$ berlaku $xA = yA$. Diambil sebarang $x, y \in G$. Diperhatikan bahwa

$$(xA)(y) = (yA)(y)$$
$$A(x^{-1}y) = A(y^{-1}y)$$
$$A(x^{-1}y) = A(e).$$

Jadi, diperoleh $A(x^{-1}y) = A(e)$, untuk setiap $x, y \in G$.

Sebaliknya, diambil sebarang $g \in G$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} xA(g) &= A(x^{-1}g) \\ &= A(x^{-1}yy^{-1}g) \\ &\geq \min\{A(x^{-1}y), A(y^{-1}g)\} \\ &= \min\{A(e), A(y^{-1}g)\} \\ &= A(y^{-1}g) \\ &= yA(g). \end{aligned}$$

Jadi, $xA(g) \geq yA(g)$. Lebih lanjut, dengan cara analog, diperoleh $yA(g) \geq xA(g)$. Dengan demikian, didapat $xA(g) = yA(g)$, untuk setiap $g \in G$. Dengan kata lain, diperoleh $xA = yA$. Oleh karena itu, teorema berikut ini telah terbukti.

Teorema 5.2. [8] *Misalkan A merupakan subgrup multi-fuzzy pada grup G. Untuk sebarang $x, y \in G$, $xA = yA$ jika dan hanya jika $A(x^{-1}y) = A(e)$.*

Akibat dari Teorema 5.2 di atas, diberikan pada teorema berikut.

Teorema 5.3. *Misalkan A merupakan subgrup normal multi-fuzzy pada grup G. Untuk sebarang $x, y, u, v \in G$, jika $xA = uA$ dan $yA = vA$, maka $(xy)A = (uv)A$.*

Bukti. Diketahui $xA = uA$ dan $yA = vA$. Berdasarkan Teorema 5.2 di atas, didapatkan $x^{-1}u, y^{-1}v \in A_*$. Lebih lanjut, karena A_* subgrup normal, berarti

$$(xy)^{-1}uv = (y^{-1}x^{-1})u(yy^{-1})v = y^{-1}(x^{-1}u)y(y^{-1}v) \in A_*.$$

Menurut Teorema 5.2, didapat $(xy)A = (uv)A$. □

Misalkan A merupakan subgrup normal multi-fuzzy pada grup G. Didefinisikan himpunan $G/A = \{xA : x \in G\}$. Menurut Teorema 5.3 di atas, didefinisikan satu operasi biner " $*$ " pada himpunan G/A sebagai berikut.

$$(xA) * (yA) = (xy)A, \text{ untuk setiap } x, y \in G.$$

Dengan operasi biner tersebut, berikut ini diberikan sifat bahwa $(G/A, *)$ grup.

Teorema 5.4. *Misalkan A merupakan subgrup normal multi-fuzzy pada grup G dan $G/A = \{xA : x \in G\}$. Himpunan G/A membentuk grup terhadap operasi biner " $*$ " yang didefinisikan dengan*

$$(xA) * (yA) = (xy)A$$

untuk setiap $x, y \in G$.

Bukti. Berdasarkan Teorema 5.3 di atas, terbukti bahwa operasi biner " $*$ " tersebut *well-defined*. Selanjutnya, akan dibuktikan $(G/A, *)$ membentuk grup.

(1) Untuk setiap $a, x, y, z \in G$ berlaku

$$((xA * yA) * zA)(a) = ((xy)zA)(a) = (x(yz)A)(a) = (xA * (yA * zA))(a).$$

Jadi, didapat $(xA * yA) * zA = xA * (yA * zA)$, untuk setiap $xA, yA, zA \in G/A$.

(2) Terdapat elemen identitas di G/A, yaitu eA. Hal ini terjadi karena untuk setiap $xA \in G/A$ dan setiap $a \in G$ berlaku

$$(xA * eA)(a) = xeA(a) = xA(a) = exA(a) = (eA * xA)(a).$$

(3) Setiap $xA \in G/A$ mempunyai invers di G/A, yaitu $x^{-1}A \in G/A$. Hal ini terjadi karena untuk setiap $xA \in G/A$ dan untuk setiap $a \in G$ berlaku

$$(xA * x^{-1}A)(a) = xx^{-1}A(a) = eA(a) = (x^{-1}xA)(a) = (x^{-1}A * xA)(a).$$

Jadi, terbukti bahwa $(G/A, *)$ membentuk grup. □

Mengacu pada Teorema 5.4 di atas, diperoleh definisi grup faktor dari grup G relatif terhadap subgrup normal multi-fuzzy A berikut.

Definisi 5.5. *Misalkan A merupakan subgrup normal multi-fuzzy pada grup G. Grup G/A terhadap operasi biner "$*$" yang didefinisikan dengan*

$$(xA) * (yA) = (xy)A$$

untuk setiap $x, y \in G$, dinamakan sebagai grup faktor dari G relatif terhadap A.

Contoh 5.6. *Diberikan subgrup normal multi-fuzzy A pada grup K seperti pada Contoh 4.2. Dapat dilihat bahwa $K/A = \{eA, aA, bA, abA\}$. Pada himpunan K/A dilengkapi operasi biner "$*$" dengan definisi sebagai berikut.*

$$(xA) * (yA) = (xy)A$$

untuk setiap $xA, yA \in K/A$. Berdasarkan operasi biner tersebut, didapat Tabel Cayley berikut.

TABEL 1. K/A Terhadap Operasi Biner "$*$"

$*$	eA	aA	bA	abA
eA	eA	aA	bA	abA
aA	aA	eA	abA	bA
bA	bA	abA	eA	aA
abA	abA	bA	aA	eA

Menurut Tabel Cayley di atas, dapat dilihat bahwa $(K/A, *)$ merupakan grup. Jadi, grup $(K/A, *)$ merupakan grup faktor dari K relatif terhadap A.

6. KOSET MULTI-FUZZY DARI SUBGRUP NORMAL MULTI-ANTI FUZZY

Pada bagian ini dibahas konsep koset multi-fuzzy dari subgrup normal multi-anti fuzzy pada suatu grup. Koset multi-fuzzy ini akan digunakan untuk membentuk grup faktor relatif terhadap subgrup normal multi-anti fuzzy.

Definisi 6.1. [7] *Misalkan B merupakan subgrup multi-anti fuzzy pada grup G. Untuk sebarang $x \in G$, didefinisikan $(xB)(y) = B(x^{-1}y)$, untuk setiap $y \in G$, dinamakan sebagai koset kiri multi-fuzzy dari subgrup multi-anti fuzzy B pada grup G yang ditentukan oleh $x \in G$.*

Definisi 6.2. [7] *Misalkan B merupakan subgrup multi-anti fuzzy pada grup G. Untuk sebarang $x \in G$, didefinisikan $(Bx)(y) = B(yx^{-1})$, untuk setiap $y \in G$, dinamakan sebagai koset kanan multi-fuzzy dari subgrup multi-anti fuzzy B pada grup G yang ditentukan oleh $x \in G$.*

Teorema 6.3. [7] *Misalkan B merupakan subgrup multi-anti fuzzy pada grup G. Subgrup multi-anti fuzzy B merupakan subgrup normal multi-anti fuzzy pada G jika dan hanya jika $xB = Bx$, untuk setiap $x \in G$.*

Bukti. Diketahui B subgrup normal multi-anti fuzzy pada grup G. Artinya $B(xy) = B(yx)$, untuk setiap $x, y \in G$. Diambil sebarang $x, z \in G$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} B(z^{-1}x) &= B(xz^{-1}) \\ B((z^{-1}x)^{-1}) &= B((xz^{-1})^{-1}) \\ B(x^{-1}z) &= B(zx^{-1}) \\ (xB)(z) &= (Bx)(z). \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $xB = Bx$, untuk setiap $x \in G$.

Sebaliknya, diketahui $xB = Bx$, untuk setiap $x \in G$. Diambil sebarang $x, z \in G$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (xB)(z) &= (Bx)(z) \\ B(x^{-1}z) &= B(zx^{-1}) \\ B((x^{-1}z)^{-1}) &= B((zx^{-1})^{-1}) \\ B(z^{-1}x) &= B(xz^{-1}). \end{aligned}$$

Dengan demikian, didapat $B(z^{-1}x) = B(xz^{-1})$, untuk setiap $x, z^{-1} \in G$. Jadi, terbukti bahwa B merupakan subgrup normal multi-anti fuzzy pada G. □

Teorema 6.4. [7] *Jika B merupakan subgrup normal multi-anti fuzzy pada grup G, maka $xB = yB$ jika dan hanya jika $x^{-1}y \in B_*$, untuk $x, y \in G$.*

Bukti. Pembuktiannya analog dengan Teorema 5.2. □

Akibat dari Teorema 6.4 di atas, dinyatakan pada sifat berikut.

Teorema 6.5. [7] *Misalkan B merupakan subgrup normal multi-anti fuzzy pada grup G. Untuk sebarang $x, y, u, v \in G$, jika $xB = uB$ dan $yB = vB$, maka $(xy)B = (uv)B$.*

Bukti. Karena $xB = uB$ dan $yB = vB$, berarti menurut Teorema 6.4, diperoleh $x^{-1}u, y^{-1}v \in B_*$. Lebih lanjut, karena B_* subgrup normal, berarti

$$(xy)^{-1}uv = (y^{-1}x^{-1})u(yy^{-1})v = y^{-1}(x^{-1}u)y(y^{-1}v) \in B_*.$$

Berdasarkan Teorema 6.4, didapat $(xy)B = (uv)B$. □

Misalkan B merupakan subgrup normal multi-anti fuzzy pada grup G. Didefinisikan suatu himpunan $G/B = \{xB : x \in G\}$. Mengacu pada Teorema 6.5 di atas, didefinisikan satu operasi biner " $*$ " pada himpunan G/B sebagai berikut.

$$(xB) * (yB) = (xy)B, \text{ untuk setiap } x, y \in G.$$

Dengan operasi biner tersebut, dapat dibuktikan bahwa $(G/B, *)$ merupakan grup seperti dinyatakan pada sifat berikut ini.

Teorema 6.6. [7] *Misalkan B merupakan subgrup normal multi-anti fuzzy pada grup G dan $G/B = \{xB : x \in G\}$. Himpunan G/B membentuk grup terhadap operasi biner " $*$ " yang didefinisikan dengan*

$$(xB) * (yB) = (xy)B$$

untuk setiap $x, y \in G$.

Bukti. Bukti analog dengan pembuktian Teorema 5.4. □

Menurut Teorema 6.6 di atas, dihasilkan suatu definisi grup faktor dari grup G relatif terhadap subgrup normal multi-anti fuzzy B sebagai berikut.

Definisi 6.7. [7] *Misalkan B merupakan subgrup normal multi-anti fuzzy pada grup G. Grup G/B terhadap operasi biner " $*$ " yang didefinisikan dengan*

$$(xB) * (yB) = (xy)B$$

untuk setiap $x, y \in G$, dinamakan sebagai grup faktor dari G relatif terhadap B.

Contoh 6.8. *Diberikan subgrup normal multi-anti fuzzy B pada grup K seperti pada Contoh 4.7. Dapat dilihat bahwa $K/B = \{eB, aB, bB, abB\}$. Pada himpunan K/B dilengkapi operasi biner " $*$ " dengan definisi sebagai berikut.*

$$(xB) * (yB) = (xy)B$$

untuk setiap $xB, yB \in K/B$. Menurut operasi biner tersebut, didapat tabel berikut.

TABEL 2. K/B Terhadap Operasi Biner " $*$ "

$*$	eB	aB	bB	abB
eB	eB	aB	bB	abB
aB	aB	eB	abB	bB
bB	bB	abB	eB	aB
abB	abB	bB	aB	eB

Berdasarkan Tabel Cayley di atas, dapat dilihat bahwa $(K/B, *)$ merupakan grup. Jadi, grup $(K/B, *)$ merupakan grup faktor dari K relatif terhadap B.

7. TEOREMA KORESPONDENSI

Diberikan grup G_1 dengan elemen identitas e_1 dan grup G_2 dengan elemen identitas e_2. Dibentuk homomorfisma $f : G_1 \to G_2$ dan dua subgrup normal multi-anti fuzzy $A : G_1 \to [0,1]^k$ dan $B : G_2 \to [0,1]^k$, dengan k merupakan dimensi pada A dan B. Didefinisikan *image* dari A atas f sebagai himpunan multi-fuzzy $f(A) : G_2 \to [0,1]^k$ sedemikian sehingga untuk setiap $y \in G_2$,

$$f(A)(y) = \begin{cases} \min\{A(x) : x \in f^{-1}(y)\} & ; f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 1^k = (1, 1, \ldots, 1) & ; f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

Lebih lanjut, invers *image* dari B atas f merupakan himpunan multi-fuzzy

$$f^{-1}(B) : G_1 \to [0,1]^k$$

dengan definisi $f^{-1}(B)(x) = B(f(x))$, untuk setiap $x \in G_1$.

Teorema 7.1. [7] *Jika A konstan pada $Ker(f)$, maka $f(A)(f(x)) = A(x)$, untuk setiap $x \in G_1$.*

Teorema 7.2. [7] *Misalkan $f : G_1 \to G_2$ homomorfisma dan $A : G_1 \to [0,1]^k$ dan $B : G_2 \to [0,1]^k$ masing-masing subgrup normal multi-anti fuzzy.*

(1) *Jika f surjektif, maka $f(A)$ merupakan subgrup normal multi-anti fuzzy;*
(2) *Himpunan bagian multi-anti fuzzy $f^{-1}(B)$ merupakan subgrup normal multi-anti fuzzy dengan $f^{-1}(B)$ bernilai konstan pada $Ker(f)$;*
(3) *Jika f surjektif, maka $f(f^{-1}(B)) = B$.*
(4) *Jika A bernilai konstan pada $Ker(f)$, maka $f^{-1}(f(A)) = A$.*

Bukti. (1) Diambil sebarang $u, v \in G_2$. Artinya terdapat $x, y \in G_1$ sehingga $f(x) = u$ dan $f(y) = v$. Jelas bahwa $xy^{-1} \in f^{-1}(uv^{-1})$ dan $y^{-1}xy \in f^{-1}(v^{-1}uv)$. Oleh karena itu, didapat

$$\begin{aligned} f(A)(uv^{-1}) &= \min\{A(z) : z \in f^{-1}(uv^{-1})\} \\ &\leq \min\{A(xy^{-1}) : x \in f^{-1}(u), y \in f^{-1}(v)\} \\ &\leq \min\{\max\{A(x), A(y)\} : x \in f^{-1}(u), y \in f^{-1}(v)\} \\ &= \max\{\min\{A(x) : x \in f^{-1}(u)\}, \min\{A(y) : y \in f^{-1}(v)\}\} \\ &= \max\{f(A)(u), f(A)(v)\}. \end{aligned}$$

Jadi, $f(A)$ subgrup multi-anti fuzzy. Lebih lanjut,

$$\begin{aligned} f(A)(v^{-1}uv) &= \min\{A(z) : z \in f^{-1}(v^{-1}uv)\} \\ &\leq \min\{A(y^{-1}xy) : x \in f^{-1}(u), y \in f^{-1}(v)\} \\ &\leq \min\{A(x) : x \in f^{-1}(u)\} \\ &= f(A)(u). \end{aligned}$$

Jadi, terbukti $f(A)$ subgrup normal multi-anti fuzzy pada G_2.

(2) Untuk setiap $x, y \in G_1$, diperoleh

$$\begin{aligned} f^{-1}(B)(xy^{-1}) &= B(f(xy^{-1})) \\ &\leq \max\{B(f(x)), B(f(y))\} \\ &= \max\{f^{-1}(B)(x), f^{-1}(B)(y)\}. \end{aligned}$$

Dengan demikian, $f^{-1}(B)$ subgrup multi-anti fuzzy. Lebih lanjut,

$$f^{-1}(B)(y^{-1}xy) = B(f(y^{-1}xy)) = B(f(x)) = f^{-1}(B)(x).$$

Oleh karena itu, $f^{-1}(B)$ subgrup normal multi-anti fuzzy pada G_1. Diperhatikan bahwa $f^{-1}(B)(x) = B(f(x)) = B(e_2)$, untuk setiap $x \in Ker(f)$. Jadi, terbukti bahwa $f^{-1}(B)$ subgrup normal multi-anti fuzzy dengan $f^{-1}(B)$ bernilai konstan pada $Ker(f)$.

(3) Diketahui f surjektif. Artinya untuk setiap $y \in G_2$, terdapat $x \in G_1$ sehingga $y = f(x)$. Menurut Poin 2 di atas, didapat $f^{-1}(B)$ bernilai konstan pada $Ker(f)$. Dengan hal tersebut, menurut Teorema 7.1, didapat

$$f(f^{-1}(B))(y) = f(f^{-1}(B))(f(x)) = f^{-1}(B)(x) = B(f(x)) = B(y).$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $f(f^{-1}(B)) = B$.

(4) Diambil sebarang $x \in G_1$. Dengan menggunakan Teorema 7.1, didapat

$$f^{-1}(f(A))(x) = f(A)(f(x)) = A(x).$$

Jadi, terbukti bahwa $f^{-1}(f(A)) = A$.

$\square$

Berdasarkan Teorema 7.2 di atas, diperoleh Teorema Korespondensi dari subgrup normal multi-anti fuzzy berikut ini.

Teorema 7.3. [7] *(Teorema Korespondensi) Jika $f : G_1 \to G_2$ epimorfisma grup, maka terdapat korespondensi satu-satu antara subgrup-subgrup normal multi-anti fuzzy pada G_2 dan subgrup-subgrup normal multi-anti fuzzy pada G_1 yang bernilai konstan pada $Ker(f)$.*

Bukti. Misalkan $F(G_2)$ merupakan himpunan semua subgrup normal multi-anti fuzzy pada grup G_2 dan $F(G_1)$ merupakan himpunan semua subgrup normal multi-anti fuzzy pada grup G_1 yang bernilai konstan pada $Ker(f)$. Dibentuk pengaitan

$$\phi : F(G_1) \to F(G_2)$$

dengan definisi $\phi(A) = f(A)$, untuk setiap $A \in F(G_1)$. Akan dibuktikan pengaitan ϕ merupakan fungsi bijektif.

(1) Diambil sebarang $A \in F(G_1)$, berarti $\phi(A) = f(A)$. Menurut Teorema 7.2, $f(A)$ merupakan subgrup normal multi-anti fuzzy pada grup G_2. Oleh karena itu, $f(A) \in F(G_2)$. Lebih lanjut, diambil sebarang $A_1, A_2 \in F(G_1)$ dengan $A_1 = A_2$. Artinya $\phi(A_1) = f(A_1)$, dengan $f(A_1)(y) = \min\{A_1(x) : x \in f^{-1}(y)\}$ untuk setiap $y \in G_2$. Karena $A_1 = A_2$, berarti

$$\begin{aligned} f(A_1)(y) &= \min\{A_1(x) : x \in f^{-1}(y)\} \\ &= \min\{A_2(x) : x \in f^{-1}(y)\} \\ &= f(A_2)(y) \end{aligned}$$

untuk setiap $y \in G_2$. Dengan demikian, didapat $\phi(A_1) = f(A_1) = f(A_2) = \phi(A_2)$. Jadi, ϕ *well-defined*.

(2) Diambil sebarang $A_1, A_2 \in F(G_1)$, dengan $\phi(A_1) = \phi(A_2)$. Artinya $f(A_1) = f(A_2)$. Diambil sebarang $f(x) \in G_2$. Menurut Teorema 7.1, diperoleh

$$\begin{gathered} f(A_1)(f(x)) = f(A_2)(f(x)) \\ A_1(x) = A_2(x) \end{gathered}$$

Oleh karena itu, didapat $A_1 = A_2$. Jadi, ϕ injektif.

(3) Diambil sebarang $B \in F(G_2)$. Akan dibuktikan terdapat $f^{-1}(B) \in F(G_1)$, sehingga $\phi(f^{-1}(B)) = f(f^{-1}(B)) = B$. Didefinisikan
$$f^{-1}(B)(x) = B(f(x)),$$
untuk setiap $x \in G_1$. Menurut Teorema 7.2, didapat $f^{-1}(B)$ subgrup normal multi-anti fuzzy yang bernilai konstan pada $Ker(f)$. Jadi, $f^{-1}(B) \in F(G_1)$. Lebih lanjut, menurut Teorema 7.2, didapat $f(f^{-1}(B)) = B$. Jadi, ϕ surjektif.

Dengan demikian, terbukti ϕ merupakan fungsi bijektif. □

Misalkan $f : G_1 \to G_2$ merupakan epimorfisma grup. Diberikan subgrup normal multi-anti fuzzy A pada grup G_1 yang bernilai konstan pada $Ker(f)$. Menurut Teorema 7.2, $f(A)$ merupakan subgrup normal multi-anti fuzzy pada grup G_2. Menurut Teorema 7.3, $\phi(A) = f(A)$. Artinya A dan $f(A)$ saling berkaitan. Lebih lanjut, dengan menggunakan Teorema 6.6, A dan $f(A)$ secara berturut-turut dapat membentuk dua grup faktor, yaitu grup G_1/A dan grup $G_2/f(A)$. Berikut diberikan sifat bahwa G_1/A dan $G_2/f(A)$ saling isomorfik.

Teorema 7.4. *Misalkan $f : G_1 \to G_2$ merupakan epimorfisma grup. Jika A merupakan subgrup normal multi-anti fuzzy pada grup G_1 yang bernilai konstan pada $Ker(f)$, maka $G_1/A \cong G_2/f(A)$.*

Bukti. Jelas bahwa G_1/A dan $G_2/f(A)$ masing-masing merupakan grup. Dibentuk pengaitan $\alpha : G_1/A \to G_2/f(A)$ dengan $\alpha(aA) = (f(a))f(A)$. Akan dibuktikan bahwa α merupakan isomorfisma.

(1) Diambil sebarang $aA, bA \in G_1/A$ dengan $aA = bA$. Akibatnya menurut Teorema 6.4, didapat $A(ab^{-1}) = A(e_1)$. Karena A bernilai konstan pada $Ker(f)$, berarti menurut Teorema 7.2 didapat $f^{-1}(f(A)) = A$. Oleh karena itu, $f^{-1}(f(A))(ab^{-1}) = f^{-1}(f(A))(e_1)$. Dengan kata lain, $f(A)(f(ab^{-1})) = f(A)(f(e_1))$. Dengan demikian, didapat $f(A)(f(a)(f(b))^{-1}) = f(A)(e_2)$ atau $(f(a)(f(b))^{-1})f(A) = (e_2)f(A)$. Menurut Teorema 6.4, didapat $(f(a))f(A) = (f(b))f(A)$. Dengan kata lain, $\alpha(aA) = \alpha(bA)$. Jadi, α *well-defined.*

(2) Untuk setiap $aA, bA \in G_1/A$ berlaku $\alpha(aAbA) = \alpha(abA) = (f(ab))f(A) = (f(a)f(b))f(A) = (f(a))f(A)(f(b))f(A) = \alpha(aA)\alpha(bA)$. Jadi, α merupakan homomorfisma.

(3) Karena f epimorfisma, berarti untuk setiap $yf(A) \in G_2/f(A)$ terdapat $a \in G_1$ sedemikian sehingga $y = f(a)$. Oleh karena itu, $\alpha(aA) = (f(a))f(A) = yf(A)$. Jadi, α surjektif.

(4) Diambil sebarang $aA, bA \in G_1/A$ dengan $\alpha(aA) = \alpha(aA)$. Artinya $(f(a))f(A) = (f(b))f(A)$. Menurut Teorema 6.4, diperoleh $(f(a)(f(b))^{-1})f(A) = (e_2)f(A)$, sehingga $(f(ab^{-1}))f(A) = (f(e_1))f(A)$ atau $f(A)(f(ab^{-1})) = f(A)(f(e_1))$. Dengan kata lain, $f^{-1}(f(A))(ab^{-1}) = f^{-1}(f(A))(e_1)$. Karena A bernilai konstan pada $Ker(f)$, didapat $A(ab^{-1}) = A(e_1)$, sehingga diperoleh $aA = bA$. Jadi α injektif.

Jadi, terbukti α merupakan isomorfisma grup. Dengan demikian, terbukti bahwa $G_1/A \cong G_2/f(A)$. □

8. PENUTUP

Kesimpulan tulisan ini, yaitu jika f merupakan epimorfisma dari grup G_1 ke grup G_2 dan A merupakan subgrup normal multi-anti fuzzy pada grup G_1 yang bermilai konstan pada $Ker(f)$, maka grup faktor G_1/A dan grup faktor $G_2/f(A)$ saling isomorfik.

Saran penulis kepada pembaca yang tertarik melanjutkan penelitian ini adalah dengan memberikan contoh $f(A)$ dan $f^{-1}(B)$ yang terdapat pada halaman 13 dan 14.

References

[1] Biswas, R., Fuzzy subgroups and anti fuzzy subgroups, *Fuzzy Sets and Systems*, **35** (1990), 121-124.

[2] Liu, Y. L., Quotient groups induced by fuzzy subgroups, *Quasigroups and Related Systems*, **11** (2004), 71-78.

[3] Mukherjee, N. P., dan Bhattacharya, P., Fuzzy normal subgroups and fuzzy cosets, *Information Sciences*, **34** (1984), 225-239.

[4] Muthuraj, R., dan Balamurugan, S., Multi-fuzzy group and its level subgroups, *Gen. Math. Notes*, **17** (2013), 74-81.

[5] Muthuraj, R., dan Balamurugan, S., Multi-anti fuzzy group and its lower level subgroups, *International Journal of Engineering Research and Applications*, **3** (2013), 1498-1501.

[6] Muthuraj, R., dan Balamurugan, S., Some characterization of normal multi-fuzzy and normal multi-anti fuzzy subgroup, *IOSR Journal of Mathematic*, **10** (2014), 116-122.

[7] Muthuraj, R., dan Balamurugan, S., Correspondence theorem for normal multi-anti fuzzy subgroups, *Discovery*, **21** (2014), 113-117.

[8] Muthuraj, R., dan Balamurugan, S., A study on multi-fuzzy cosets, *International Journal of Engineering Associates*, **5** (2016), 1-7.

[9] Rosenfeld, A., Fuzzy groups, *J. Math. Anal. Appl.*, **35** (1971), 512-517.

[10] Sabu, S., dan Ramakrishnan, T. V., Multi-fuzzy sets, *International Mathematical Forum*, **50** (2010), 2471-2476.

[11] Sabu, S., dan Ramakrishnan, T. V., Multi-fuzzy subgroups, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, **6** (2011), 365-372.

[12] Zadeh, L. A., Fuzzy sets, *Information and Control*, **8** (1965), 338-353.

AMALUDDIN* (Penulis Korespondensi)
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia
amallamaluddin@gmail.com

BUDI SURODJO
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia
surodjo_b@ugm.ac.id