Jurnal Matematika Thales (JMT): 2021 ISSN: 2715-1891
Vol. 03 No. 02

PERSAMAAN FUNGSIONAL JENSEN PADA GRUP SIMETRIS S_n DAN GRUP BEBAS

(JENSEN'S FUNCTIONAL EQUATION ON SYMMETRIC GROUP S_n AND FREE GROUP)

FEBYOLA*, YENI SUSANTI

Abstract. Two natural extensions of Jensen's functional equation on the real line are the equations $f(xy) + f(xy^{-1}) = 2f(x)$ and $2f(xy) + f(y^{-1}x) = 2f(x)$ where f maps a group G into an abelian additive group H. The set of all homomorphism from G to H is a subgroup of each set of solution of Jensen's functional equation with normalized condition. When normalized, some basic reduction formulas and relations will be deduced to solved Jensen's functional equation for the case where G is the symmetric group S_n and a free group.
Keywords: Jensen's functional equation, symmetric group, free group, functional equation

Abstrak. Dua perluasan natural dari persamaan fungsional Jensen pada bilangan riil adalah persamaan $f(xy) + f(xy^{-1}) = 2f(x)$ dan $2f(xy) + f(y^{-1}x) = 2f(x)$, dengan f pemetaan dari grup G ke grup abelian penjumlahan H. Himpunan semua homomorfisma grup dari G ke H merupakan subgrup dari masing-masing himpunan solusi persamaan fungsional Jensen dengan kondisi yang dinormalisasi. Akan dicari solusi dari kedua persamaan tersebut ketika dinormalisasi untuk kasus grup simetris S_n dan grup bebas.
Kata-kata kunci: persamaan fungsional Jensen, grup simetris, grup bebas, persamaan fungsional

1. PENDAHULUAN

Suatu fungsi yang memetakan interval bilangan riil ke himpunan semua bilangan riil dikatakan memenuhi persamaan fungsional Jensen jika fungsi tersebut mengawetkan titik tengah. Diberikan bentuk asli persamaan fungsional Jensen di himpunan semua bilangan riil sebagai berikut

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \qquad \text{untuk setiap } x, y \in [a,b] \subseteq \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Pada perkembangan selanjutnya, persamaan fungsional Jensen dapat diperluas menjadi fungsi yang memetakan sebarang grup ke grup abelian [6]. Misalkan G adalah grup terhadap operasi perkalian dan H adalah grup abelian terhadap operasi penjumlahan. [6] memberikan bentuk perluasan natural dari persamaan fungsional Jensen (1.1) menjadi fungsi yang memetakan grup G ke grup abelian H sebagaimana berikut

$$f(xy) + f(xy^{-1}) = 2f(x), \quad \text{untuk setiap } x, y \in G; \tag{1.2}$$

$$f(xy) + f(y^{-1}x) = 2f(x), \quad \text{untuk setiap } x, y \in G. \tag{1.3}$$

Misalkan $\mathcal{S}_1(G,H)$ dan $\mathcal{S}_2(G,H)$ berturut-turut menotasikan himpunan solusi dari persamaan fungsional (1.2) dan (1.3) dengan kondisi yang dinormalisasi. Himpunan-himpunan solusi tersebut merupakan grup terhadap operasi penjumlahan fungsi. Lebih lanjut, [6] menunjukkan bahwa himpunan semua homomorfisma grup dari G ke H, dinotasikan dengan $\text{Hom}(G,H)$, merupakan subgrup dari masing-masing grup $\mathcal{S}_1(G,H)$ dan $\mathcal{S}_2(G,H)$. Dengan kata lain, diperoleh

$$\text{Hom}(G,H) \leq \mathcal{S}_1(G,H) \quad \text{dan} \quad \text{Hom}(G,H) \leq \mathcal{S}_2(G,H).$$

Dari sini kemudian muncul pertanyaan kapan terpenuhi persamaan $\text{Hom}(G,H) = \mathcal{S}_1(G,H)$ dan $\text{Hom}(G,H) = \mathcal{S}_2(G,H)$. Pada [8] dikatakan bahwa persamaan tersebut berlaku untuk kasus-kasus khusus, misalkan pada saat G merupakan grup bebas [8] dan pada saat G merupakan grup simetris [8]. Pembuktian lebih lanjut untuk kasus G merupakan grup simetris dilakukan pula oleh [4].

Mula-mula diberikan sifat-sifat persamaan fungsional Jensen pada grup. Kemudian diberikan penerapan persamaan Jensen pada grup simetris S_n dan grup bebas.

1.1. Persamaan Fungsional Jensen pada Grup.

Persamaan fungsional Jensen pada bagian sebelumnya diperluas dari interval tertutup $[a,b]$ ke $\mathbb{R}$. Selanjutnya, persamaan fungsional Jensen pada $\mathbb{R}$ akan digeneralisasi ke sebarang grup.

Diberikan grup $(G,\cdot)$ dengan elemen identitas e dan grup abelian $(H,+)$ dengan elemen identitas 0. Misalkan $f : G \longrightarrow H$ merupakan sebarang pemetaan. Dipandang perluasan natural dari persamaan fungsional Jensen berikut:

$$f(xy) + f(xy^{-1}) = 2f(x), \text{ untuk setiap } x, y \in G; \tag{1.4}$$

$$f(xy) + f(y^{-1}x) = 2f(x), \text{ untuk setiap } x, y \in G. \tag{1.5}$$

Karena persamaan fungsional Jensen merupakan penjumlahan di f, tanpa mengurangi keumuman diberikan kondisi yang dinormalisasi

$$f(e) = 0. \tag{1.6}$$

Himpunan semua solusi dari persamaan fungsional (1.4) dan (1.5) berturut-turut dengan kondisi yang dinormalisasi (1.6) dilambangkan dengan $\mathcal{S}_1(G,H)$ dan $\mathcal{S}_2(G,H)$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\mathcal{S}_1(G,H)$ dan $\mathcal{S}_2(G,H)$ membentuk grup terhadap operasi penjumlahan.

Teorema 1.1. *Untuk sebarang grup G dan grup abelian H, berlaku $(\mathcal{S}_1(G,H),+)$ dan $(\mathcal{S}_2(G,H),+)$ merupakan grup.*

Teorema 1.2. *Untuk sebarang G grup dan H grup abelian, berlaku* $\mathrm{Hom}(G,H)$ *merupakan subgrup dari $\mathcal{S}_1(G,H)$. Begitu pula* $\mathrm{Hom}(G,H)$ *merupakan subgrup dari $\mathcal{S}_2(G,H)$.*

2. Persamaan Fungsional Jensen pada Grup Simetris S_n dan Grup Bebas

2.1. **Persamaan fungsional** $f(xy)+f(xy^{-1}) = 2f(x)$**.** Pada bagian ini ditinjau persamaan fungsional (1.4) dengan kondisi yang dinormalisasi (1.6). Misalkan G grup dan H grup abelian. Setiap pemetaan $f : G \to H$ mempunyai kernel Cauchy $A : G\times G \to H$ yang didefinisikan oleh

$$A(x,y) = f(xy) - f(x) - f(y) \quad \text{untuk setiap } x,y \in G. \tag{2.1}$$

Kemudian akan diberikan penjelasan tentang bi-homomorfisma. Misalkan G_1, G_2, dan H grup. Pemetaan $\Phi : G_1 \times G_2 \to H$ disebut bi-homomorfisma, jika pemetaan-pemetaan $x_2 \longmapsto \Phi(y,x_2)$ dan $x_1 \longmapsto \Phi(x_1,z)$ merupakan homomorfisma untuk setiap $y \in G_1$ dan $z \in G_2$.

Berikut merupakan sifat-sifat persamaan fungsional Jensen (1.4) pada grup.

Proposisi 2.1. [6] *Misalkan $(G,\cdot)$ grup dan $(H,+)$ grup abelian. Misalkan $f \in \mathcal{S}_1(G,H)$ dan A kernel Cauchy dari f. Untuk setiap $x, x_i, y, y_i, z, u, v \in G; m,n,p,q \in \mathbb{Z}$, dan sebarang panjang $l \geqslant 1$ berlaku*

$$f(xyz) + f(xzy) = 2f(xy) + 2f(xz) - 2f(x); \tag{2.2}$$

$$f(xyz) + f(yxz) = 2f(xz) + 2f(yz) - 2f(z); \tag{2.3}$$

$$2f(xyz) = 2f(xy) + 2f(xz) + 2f(yz) - 2f(x) - 2f(y) - 2f(z); \tag{2.4}$$

$$f(xyz) - f(xzy) = 2f(yz) - 2f(y) - 2f(z); \tag{2.5}$$

$$f(xy^nz) = nf(xyz) - (n-1)f(xz). \tag{2.6}$$

Secara khusus, diperoleh

$$f(x^n) = nf(x). \tag{2.7}$$

Selanjutnya,

$$\left.\begin{aligned} A(xy^nz,u) &= nA(xyz,u) - (n-1)A(xz,u); \\ A(u,xy^nz) &= nA(u,xyz) - (n-1)A(u,xz); \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

$$A(x,y) = -A(y,x); \tag{2.9}$$

$$A(x,y) + A(xy,z) = A(x,yz) + A(y,z); \tag{2.10}$$

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1x_2\cdots x_l, y) \textit{ dan } A(x, y_1y_2\cdots y_l) \textit{ adalah invarian} \\ \textit{atas permutasi pada } \{1,2,\ldots,l\}; \end{array}\right\} \tag{2.11}$$

$$2A \textit{ adalah suatu bi-homomorfisma}; \tag{2.12}$$

$$f(xuvy) = f(xvuy) + 2A(u,v); \tag{2.13}$$

$$A(x^my^n, x^py^q) = mqA(x,y) + npA(y,x) \tag{2.14}$$

misalkan A kernel Cauchy dari f. Didefinisikan fungsi B dengan

$$B(x_1,x_2,\ldots,x_l) = f(x_1x_2\cdots x_l) - \sum_{i=1}^{l} f(x_i) - \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{l} A(x_i,x_j) \tag{2.15}$$

untuk $x_1, x_2, \ldots, x_l$ di G.

Proposisi 2.2. [7] *Misalkan $f \in \mathcal{S}_1(G,H)$, dan A, B didefinisikan oleh Persamaan* (2.1) *dan* (2.15)*, berlaku*

$$B(x_1) = 0, B(x_1,x_2) = 0 \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} B(x_1,x_2,\ldots,x_l) &= f(x_1x_2\cdots x_l) \\ &\quad + (l-2)\sum_i f(x_i) - \sum_{i<j} f(x_ix_j) \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$B(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},e,x_k,\ldots,x_l) = B(x_1,x_2,\ldots,x_l) \tag{2.18}$$

$$B(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},y,y^{-1},x_k,\ldots,x_l) = B(x_1,x_2,\ldots,x_l) \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} B(x_1,x_2,\ldots,x_l) &= B(x_{\pi(1)},x_{\pi(2)},\ldots,x_{\pi(l)}) \\ \textit{untuk setiap permutasi } &\pi \textit{ pada } \{1,2,\ldots,l\} \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$B(x_1,x_2,\ldots,x_l,y,y) = B(x_1,x_2,\ldots,x_l) \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} B(x_1,x_2,\ldots,x_l,x_{l+1}) &= B(x_1,x_2,\ldots,x_l) \\ &\quad + A(x_1,x_2,\ldots,x_l,x_{l+1}) - \sum_{i\leqslant l} A(x_i,x_{l+1}) \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$2B = 0 \tag{2.23}$$

Teorema 2.3. [6] *Jika G merupakan grup dengan 2 pembangun dan $f \in \mathcal{S}_1(G,H)$, maka kernel Cauchy A dari f merupakan bi-homomorfisma.*

2.1.1. *Solusi pada Grup Simetris S_n.* Akan dibuktikan teorema utama yang menyatakan bahwa untuk sebarang bilangan asli $n \geq 1$ dan sebarang grup abelian H, berlaku $\mathcal{S}_1(S_n,H) = \mathrm{Hom}(S_n,H)$.

Lemma 2.4. [4] *Misalkan $\sigma = (ab)$ dan $\tau = (bc)$ merupakan transposisi pada S_n dengan $a \neq c$. Untuk setiap $f \in \mathcal{S}_1(S_n,H)$ berlaku*

$$f(\sigma\tau) = f(\sigma) + f(\tau) = 0.$$

Lemma 2.5. [4] *Misalkan $\sigma = (ab)$ dan $\tau = (cd)$ merupakan transposisi-transposisi pada S_n dengan a, b, c, d elemen-elemen yang berbeda, maka untuk setiap $f \in \mathcal{S}_1(S_n,H)$ diperoleh*

$$f(\sigma\tau) = f(\sigma) + f(\tau) = 0.$$

Lemma 2.6. [4] *Hasil kali dari sebarang dua transposisi pada S_n selalu memiliki akar kuadrat.*

Lemma 2.7. [4] *Untuk setiap $f \in \mathcal{S}_1(S_n, H)$ berlaku $2f(x) = 0$ untuk setiap $x \in S_n$.*

Akibat 2.8. [4] *Untuk setiap $f \in \mathcal{S}_1(S_n, H)$ dan untuk setiap $x, y, z \in S_n$ berlaku*

$$f(xyz) = f(xzy) = f(yxz).$$

Dengan demikian, urutan transposisi dari setiap permutasi $x \in S_n$ dapat diatur ulang sedemikian sehingga nilai $f(x)$ tidak berubah.

Lemma 2.9. [4] *Untuk setiap $f \in \mathcal{S}_1(S_n, H)$ dan untuk setiap $x \in S_n$, pernyataan berikut berlaku:*

(1) *Jika x merupakan permutasi genap maka $f(x) = 0$.*
(2) *Jika x merupakan permutasi ganjil, misalkan $x = \sigma_1 \ldots \sigma_{2s+1}$ untuk suatu s bilangan bulat positif, maka $f(x) = -f(\sigma_r)$ dengan $r = 2s + 1$*

Menggunakan sifat-sifat diatas dibuktikan teorema utama solusi persamaan fungsional Jensen (1.4) pada grup simetris S_n.

Teorema 2.10. [4] *Untuk sebarang bilangan asli $n \geq 1$ dan sebarang grup abelian H, berlaku $\mathcal{S}_1(S_n, H) = \mathrm{Hom}(S_n, H)$.*

Bukti. Misalkan f sebarang elemen dari $\mathcal{S}_1(S_n, H)$. Diambil sebarang permutasi x dan y di S_n. Permutasi-permutasi x dan y dapat ditulis sebagai $x = \sigma_1 \cdots \sigma_r$ dan $y = \tau_1 \cdots \tau_s$ dengan σ_i dan τ_j merupakan transposisi di S_n. Diperoleh kasus sebagai berikut:
Kasus pertama: r dan s keduanya genap, berarti hasil kali xy merupakan permutasi genap, sehingga berdasarkan Lemma 2.9 diperoleh $f(x) = f(y) = f(xy) = 0$. Dengan demikian, $f(xy) = f(x) + f(y)$.
Kasus kedua: r genap dan s ganjil. Ini artinya hasil kali xy merupakan permutasi ganjil. Oleh karena itu, berdasarkan Lemma 2.9 diperoleh $f(x) = 0, f(y) = -f(\tau_s)$ dan

$$f(xy) = f((\sigma_1 \cdots \sigma_r)(\tau_1 \cdots \tau_{s-1})\tau_s) = -f(\tau_s) = f(x) + f(y).$$

Kasus ketiga: r ganjil dan s genap. Sejalan dengan kasus kedua, diperoleh

$$f(xy) = -f(\sigma_r) = f(x) + f(y).$$

Kasus keempat: r dan s keduanya ganjil, berarti $f(x) = -f(\sigma_r), f(y) = -f(\tau_s)$ sedangkan $f(xy) = 0$ karena hasil kali xy merupakan permutasi genap. Sebagaimana pada bukti Lemma 2.4 dan Lemma 2.5 diperoleh $f(\sigma_r) + f(\tau_s) = 0$. Oleh karena itu, pada kasus ini diperoleh $f(xy) = 0 = f(x) + f(y)$.
Dengan demikian, untuk setiap kasus selalu diperoleh $f(xy) = f(x) + f(y)$ yaitu $f \in \mathrm{Hom}(S_n, H)$. Teorema 2.10 terbukti. □

2.1.2. *Solusi pada Grup Bebas.* Misalkan $G = \langle a, b \rangle$ grup bebas pada dua pembangun a, b. Untuk setiap $x \in G$, dapat ditulis dalam bentuk

$$x = a^{m_1} b^{n_1} a^{m_2} b^{n_2} \cdots a^{m_l} b^{n_l} \tag{2.24}$$

dengan $m_i, n_i \in \mathbb{Z}$ dan $l \geqslant 1$. Untuk *word* x yang diawali dengan b atau b^{-1}, diambil $m_1 = 0$. Untuk *word* yang berakhir dengan a atau a^{-1}, diambil $n_l = 0$. Untuk *empty word* diambil $m_1 = n_1 = 0, l = 1$. Bentuk ini tunggal saat dipilih

$$m_i \neq 0, \quad n_i \neq 0 \tag{2.25}$$

kecuali untuk m_1 dan n_l yang memungkinkan.

Teorema 2.11. [6] *Misalkan $G = \langle a, b\rangle$ merupakan grup bebas pada dua pembangun a, b. Jika $f \in \mathcal{S}_1(G, H)$, maka f dapat didekomposisi*

$$\begin{aligned} f(a^{m_1}b^{n_1}\cdots a^{m_l}b^{n_l}) &= \left(\sum_{i\leqslant l} m_i\right) f(a) + \left(\sum_{i\leqslant l} n_i\right) f(b) \\ &+ \left(\sum_{i\leqslant j\leqslant l} m_i n_j - \sum_{j<i\leqslant l} m_i n_j\right)[f(ab) - f(a) - f(b)] \end{aligned} \tag{2.26}$$

untuk setiap $l \leqslant 1$, $m_i, n_i \in Z$. Sebaliknya, setiap pemetaan yang diinisialisasi pada tiga word a, b dan ab dapat diperluas menjadi suatu f di $\mathcal{S}_1(G, H)$ dengan mengambil Persamaan (2.26) *sebagai rumus pendefinisiannya.*

Bukti. Andaikan $f \in \mathcal{S}_1(G, H)$. Berdasarkan Proposisi 2.1 dan Teorema 2.3, kernel Cauchy A merupakan bi-homomorfisma *skew symmetric*. Selanjutnya, relasi-relasi

$$A(x^m, y^p) = 0, \quad f(y^n) = nf(y) \tag{2.27}$$

merupakan konsekuensi implisit dari reduksi rumus (2.6) dan (2.14), dan dari kondisi awal (1.6). Oleh karena itu, berdasarkan kesepakatan bahwa $\sum_\varnothing = 0$ dan perhitungan

$$\begin{aligned} f(a^{m_1}b^{n_1}) &= f(a^{m_1}) + f(b^{n_1}) + A(a^{m_1}, b^{n_1}) \\ &= m_1 f(a) + n_1 f(b) + m_1 n_1 A(a, b), \end{aligned}$$

menggunakan Persamaan (2.14), menghasilkan dekomposisi (2.26) untuk $l = 1$. Andaikan, sebagaimana hipotesis induksi, bahwa Persamaan (2.26) berlaku untuk $l \geqslant 1$. Perhitungan berikut menggunakan Persamaan (2.11) dan (2.14)

$$
\begin{aligned}
& f(a^{m_1}b^{n_1}\cdots a^{m_l}b^{n_l}a^{m_{l+1}}b^{n_{l+1}}) \\
=& f(a^{m_1}b^{n_1}\cdots a^{m_l}b^{n_l}) + f(a^{m_{l+1}}b^{n_{l+1}}) + A(a^{m_1}b^{n_1}\cdots a^{m_l}b^{n_l}, a^{m_{l+1}}b^{n_{l+1}}) \\
=& \left(\sum_{i\leqslant l} m_i\right) f(a) + \left(\sum_{i\leqslant l} n_i\right) f(b) + \left(\sum_{i\leqslant j\leqslant l} m_i n_j - \sum_{j<i\leqslant l} m_i n_j\right) A(a,b) \\
& + [m_{l+1}f(a) + n_{l+1}f(b) + m_{l+1}n_{l+1}A(a,b)] \\
& + \left(\sum_{i\leqslant l} m_i\right) n_{l+1}A(a,b) + \left(\sum_{i\leqslant l} n_i\right) m_{l+1}A(b,a) \\
=& \left(\sum_{i\leqslant l+1} m_i\right) f(a) + \left(\sum_{i\leqslant l+1} n_i\right) f(b) \\
& + \left[\left(\sum_{i\leqslant j\leqslant l} m_i n_j - \sum_{j<i\leqslant l} m_i n_j\right) + m_{l+1}n_{l+1} + \sum_{i\leqslant l} m_i n_{l+1} - \sum_{i\leqslant l} n_i m_{l+1}\right] A(a,b) \\
=& \left(\sum_{i\leqslant l+1} m_i\right) f(a) + \left(\sum_{i\leqslant l+1} n_i\right) f(b) + \left(\sum_{i\leqslant j\leqslant l+1} m_i n_j - \sum_{j<i\leqslant l+1} m_i n_j\right) A(a,b)
\end{aligned}
$$

melengkapi bukti induktif dari Persamaan (2.26).

Untuk bukti arah sebaliknya, mula-mula diberikan empat ekspresi

$$\sum_{i\leqslant l} m_i, \quad \sum_{i\leqslant l} n_i, \quad \sum_{i\leqslant j\leqslant l} m_i n_j, \quad \sum_{j<i\leqslant l} m_i n_j \tag{2.28}$$

yang terdapat pada Persamaan (2.26) dan ekspresi-ekspresi tersebut dipandang sebagai fungsi E_1, E_2, E_3, E_4, dalam urutan ini, didefinisikan atas *string* yang formal

$$a^{m_i}b^{n_1}b^{m_2}b^{n_2}\cdots a^{m_l}b^{n_l} \tag{2.29}$$

dengan $l \leqslant 1, m_i, n_i \in \mathbb{Z}_3$. Kembali, berdasarkan kesepakatan bahwa $\sum_{\varnothing} = 0$. Dengan penotasian dan operasi berikut

$$
\begin{aligned}
& X = a^{m_1}b^{n_1}a^{m_2}b^{n_2}\cdots a^{m_l}b^{n_l}, \qquad Y = a^{p_1}b^{q_1}a^{p_2}b^{q_2}\cdots a^{p_k}b^{q_k} \\
& XY = a^{m_1}b^{n_1}a^{m_2}b^{n_2}\cdots a^{m_l}b^{n_l}a^{p_1}b^{q_1}a^{p_2}b^{q_2}\cdots a^{p_k}b^{q_k} \\
& X^{-1} = a^0 b^{-n_l}a^{-m_l}\cdots b^{-n_2}a^{-m_2}b^{-n_1}a^{-m_1}b_0
\end{aligned}
$$

didata beberapa relasi yang dapat diverifikasi secara langsung sebagai berikut :

$$E_1\left(X^{-1}\right) = -E_1(X); \qquad E_2\left(X^{-1}\right) = -E_2(X), \tag{2.30}$$

$$E_3\left(X^{-1}\right) = E_4(X); \qquad E_4\left(X^{-1}\right) = E_3(X), \tag{2.31}$$

$$E_1\left(XY\right) = E_1(X) + E_1(Y); \qquad E_2(XY) = E_2(X) + E_2(Y), \tag{2.32}$$

$$E_3(XY) = E_3(X) + E_3(Y) + E_1(X)E_2(Y), \tag{2.33}$$

$$E_4(XY) = E_4(X) + E_4(Y) + E_2(X)E_1(Y), \tag{2.34}$$

Lebih lanjut, setiap E_λ invariant atas kompresi :

$$E_\lambda(a^{m_1}b^{n_1}a^{m_2}b^{n_2}\cdots a^{m_l}b^{n_l}) = E_\lambda(a^{m_1}\cdots a^{m_{p-1}}b^{n_{p-1}+n_p}a^{m_{p+1}}\cdots b^{n_l}) \tag{2.35}$$

saat $m_p = 0$ untuk suatu $1 < p \leqslant l$, dan

$$E_\lambda(a^{m_1}b^{n_1}a^{m_2}b^{n_2}\cdots a^{m_l}b^{n_l}) = E_\lambda(a^{m_1}\cdots b^{n_{p-1}}a^{m_p+m_{p+1}}b^{n_{p+1}}\cdots b^{n_l}) \tag{2.36}$$

saat $m_p = 0$ untuk suatu $1 \leqslant p \leqslant l$. Untuk setiap $x \in G$, x dapat dinyatakan sebagai $a^{m_1}b^{n_1}a^{m_2}b^{n_2}\cdots a^{m_l}b^{n_l}$ dan didefinisikan pemetaan $F_\lambda : G \to \mathbb{Z}$ dengan

$$F_\lambda(x) = E_\lambda(a^{m_1}b^{n_1}a^{m_2}b^{n_2}\cdots a^{m_l}b^{n_l}). \tag{2.37}$$

Karena setiap bentuk $(a^{m_1}b^{n_1}a^{m_2}b^{n_2}\cdots a^{m_l}b^{n_l})$ dapat dikompres berulang kali menjadi bentuk tunggal yang memenuhi kondisi Persamaan (2.25), invariansi (2.1.2) dan (2.36) menjamin bahwa setiap F_λ terdefinisi dengan baik pada grup bebas G. Relasi (2.30) hingga (2.34) dapat diteruskan menjadi F_λ pada G.

Misalkan $h_1, h_2, h_3 \in H$ merupakan secara sebarang adalah tetap dan didefinisikan $f : G \to H$ dengan

$$f(a^{m_1}b^{n_1}\cdots a^{m_l}b^{n_l}) = \left(\sum_{i\leqslant l} m_i\right) h_1 + \left(\sum_{i\leqslant l} n_i\right) h_2 + \left(\sum_{i\leqslant j\leqslant l} m_i n_j - \sum_{j<i\leqslant l} m_i n_j\right) h_3 \tag{2.38}$$

untuk setiap $l \leqslant 1, m_i, n_i \in \mathbb{Z}$. Ini membuat f terdefinisi dengan baik pada G melalui empat F_λ.

Misalkan diklaim bahwa $f \in S_1(G,H)$. Jumlahan dari bentuk h_1 dan h_2 menghasilkan sebuah homomorfisma dari G ke H dan oleh karena itu jumlahan h_1 dan h_2 berada di $\mathcal{S}_1(G,H)$. Dengan demikian telah cukup untuk membuktikan bahwa pemetaan khusus $g : G \to \mathbb{Z}$

$$g(a^{m_1}b^{n_1}\cdots a^{m_l}b^{n_l}) = \sum_{i\leqslant j\leqslant l} m_i n_j - \sum_{j<i\leqslant l} m_i n_j \tag{2.39}$$

berada di $\mathcal{S}_1(G,\mathbb{Z})$. Persamaan (1.6) terpenuhi karena $g(e) = g(a^0b^0) = 0$. Persamaan (1.4) juga terpenuhi karena, menggunakan Persamaan (2.30), (2.31), (2.33), (2.34) pada F_λ, diperoleh

$$\begin{aligned}
&g(xy) + g(xy^{-1}) = (F_3 - F_4)(xy) + (F_3 - F_4)(xy^{-1})\\
=&F_3(xy) + F_3(xy^{-1}) - F_4(xy) - F_4(xy^{-1})\\
=&[F_3(x) + F_3(y) + F_1(x)F_2(y)] + [F_3(x) + F_3(y^{-1}) + F_1(x)F_2(y^{-1})]\\
&- [F_4(x) + F_4(y) + F_2(x)F_1(y)] - [F_4(x) + F_4(y^{-1}) + F_2(x)F_1(y^{-1})]\\
=&[F_3(x) + F_3(y) + F_1(x)F_2(y)] + [F_3(x) + F_4(y) - F_1(x)F_2(y)]\\
&- [F_4(x) + F_4(y) + F_2(x)F_1(y)] - [F_4(x) + F_3(y) - F_2(x)F_1(y)]\\
=&2F_3(x) - 2F_4(x) = 2g(x).
\end{aligned}$$

Hasil peta dari a, b, dan ab atas pemetaan f diberikan oleh $f(a) = f(a^1b^0) = h_1$, $f(b) = f(a^0b^1) = h_2$, dan $f(ab) = f(a^1b^1) = h_1 + h_2 + h_3$. Pemetaan bijektif antara

$f(a)$, $f(b)$, $f(ab)$ dan h_1, h_2, h_3 memungkinkan Persamaan (2.38) untuk dapat ditulis ulang dalam bentuk Persamaan (2.26), dan sifat sebarang dari h_1, h_2, h_3 mengakibatkan $f(a), f(b)$ dan $f(ab)$ dapat diinisialisasi secara bebas di H. Teorema telah terbukti. □

Akibat 2.12. [6] *$\mathcal{S}_1(\langle a,b\rangle, H) = \mathrm{Hom}(\langle a,b\rangle, H)$ jika dan hanya jika $|H| = 1$.*

Bukti. Pemetaan f yang didefinisikan oleh Persamaan (2.26) merupakan homomorfisma jika dan hanya jika, inisialisasi pada a, b dan ab memenuhi $f(ab) - f(a) - f(b) = 0$. Akan tetapi jika tidak berlaku $H = \{0\}$ syarat $f(ab) - f(a) - f(b) = 0$ dari Persamaan (2.26) dapat saja tidak terpenuhi. □

Misalkan $\mathcal{A}$ merupakan alfabet yang membangun grup bebas $\langle A\rangle$, dan $\mathcal{B} = \{a^{-1} | a \in \mathcal{A}\} \cup \mathcal{A}$. Misalkan $G/\langle square\rangle$ menotasikan grup faktor dari G untuk semua kuadrat di G sama dengan e.

Teorema 2.13. [7] *Misalkan $G = \langle \mathcal{A}\rangle$. Jika $f \in \mathcal{S}_1(G, H)$, maka*

(1) *f merupakan fungsi ganjil (yaitu $f(a) + f(a^{-1}) = 0$ untuk setiap $a \in \mathcal{A}$) dan mempunyai representasi*

$$f(b_1 b_2 \cdots b_l) = \sum_i f(b_i) + \sum_{i<j} A(b_i, b_j) + g(\phi(b_1 b_2 \cdots b_l)) \tag{2.40}$$

dengan $x \in G$ dapat ditulis sebagai $x = b_1 b_2 \cdots b_l$, $b_1 \in \mathcal{B}$;

(2) *A kernel Cauchy dari f merupakan skew symmetric, menghilangkan diagonal, dan A merupakan fungsi ganjil di setiap variabel bebas dari A;*

(3) *ϕ merupakan homomorfisma natural yang bersifat pada dari G ke $G/\langle square\rangle$, grup faktor yang abelian dan elemennya memiliki pangkat paling banyak 2;*

(4) *$g : G/\langle square\rangle \to H$ memenuhi*

$$2g = 0, \text{ dan } g(a_1 a_2 \cdots a_l) = 0 \text{ untuk } l \leqslant 2, a_i \in \mathcal{A}. \tag{2.41}$$

Sebaliknya, jika $f : \mathcal{B} \to H$ merupakan fungsi ganjil, $A : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to H$ merupakan skew symmetric, menghilangkan diagonal, dan A merupakan fungsi ganjil di setiap variabel bebas dari A, dan $g : G/\langle square\rangle \to H$ memenuhi (2.41)*, maka f yang didefinisikan oleh* (2.40) *berada di $\mathcal{S}_1(G, H)$. Lebih lanjut, representasi* (2.40) *tunggal dan dapat diringkas menjadi*

$$f(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_l^{n_l}) = \sum_i n_i f(a_i) + \sum_{i<j} n_i n_j A(a_i, a_j) + g(\phi(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_l^{n_l})) \tag{2.42}$$

untuk setiap $a_i \in \mathcal{A}, n_i \in \mathbb{Z}$, dengan g memenuhi Persamaan (2.41) *dan*

$$A : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to H \text{ merupakan skew symmetric dan menghilangkan diagonal.} \tag{2.43}$$

Bukti. Misalkan $f \in \mathcal{S}_1(G, H)$ dan A merupakan kernel Cauchy dari f. Didefinisikan $g : G \to H$ dengan

$$g(b_1 b_2 \cdots b_l) := f(b_1 b_2 \cdots b_l) - \sum_i f(b_i) - \sum_{i<j} A(b_i, b_j) = B(b_1, b_2, \ldots, b_l) \tag{2.44}$$

dengan $b_i \in \mathcal{B}$. Berdasarkan kesepakatan bahwa $\sum_{\varnothing} = 0$ diperoleh $g(e) = 0$ saat $l = 0$. Berdasarkan sifat dari B yang diberikan pada Proposisi 2.2, g terdefinisi dengan baik pada G dan g dapat difaktorkan melalui $G/\langle\text{square}\rangle$. Hal ini dapat ditulis dengan lebih eksplisit sebagai

$$g(b_1b_2\cdots b_l) = g(\phi(b_1b_2\cdots b_l)) \tag{2.45}$$

dengan ϕ epimorfisma yang memetakan setiap kuadrat di G menjadi e. Lebih lanjut, berdasarkan Proposisi 2.1 dan Persamaan (2.16), (2.23), f merupakan fungsi ganjil, fungsi A dan g memiliki sifat yang telah diklaim, dan Persamaan (2.44) dan (2.45) memenuhi representasi (2.40).

Sebaliknya, misalkan $f : \mathcal{B} \to H$ sebuah fungsi ganjil, $A : \mathcal{B}\times\mathcal{B} \to H$ sebuah fungsi *skew symmetric*, menghilangkan diagonal, dan A fungsi ganjil di setiap variabel bebas dari A, $g : G\langle\text{square}\rangle \to H$ memenuhi Persamaan (2.41), dan misalkan f diperluas dari $\mathcal{B}$ ke G oleh Persamaan (2.40). Untuk sebarang $b_1, b_2, \ldots, b_l$ didefinisikan a_i dengan b_i untuk $b_i \in \mathcal{A}$, dan b_i^{-1} untuk $b_i \notin \mathcal{A}$. Dengan demikian $a_i \in \mathcal{A}$ dan $\phi(b_1b_2\cdots b_l) = \phi(a_1a_2\cdots a_l)$. Karena $g(\phi(a_1a_2\cdots a_l)) = 0$ untuk $l \leqslant 2$, diperoleh

$$g(\phi(b_1b_2\cdots b_l)) = 0, \quad l \leqslant 2. \tag{2.46}$$

Oleh karena itu, definisi Persamaan (2.40) dari f merupakan sebuah perluasan dari $\mathcal{B}$, dan

$$f(e) = 0, f(b_1b_2) = f(b_1) + f(b_2) + A(b_1, b_2). \tag{2.47}$$

Dengan menggunakan $f(e) = 0$ dan $A(b, b) = 0$, dilakukan induksi sederhana, sehingga Persamaan (2.40) dapat ditulis secara ringkas menjadi

$$f(b_1^{n_1}b_2^{n_2}\cdots b_l^{n_l}) = \sum_i n_i f(b_i) + \sum_{i<j} n_in_jA(b_i, b_j) + g(\phi(b_1^{n_1}b_2^{n_2}\cdots b_l^{n_l})) \tag{2.48}$$

untuk setiap bilangan bulat $n_i \geqslant 0$. Menggunakan sifat fungsi ganjil dari f dan A pada variabel-variabel bebasnya, tulisan di atas dapat ditulis ulang sebagai Persamaan (2.42), dengan (2.41) dan (2.43). Misalkan pada $\mathcal{A}$ diberikan relasi urutan linier $<$, untuk setiap pasangan yang berbeda a_λ, a_μ dikumpulkan bentuk-bentuk pada Persamaan (2.42) menggunakan pasangan $A(a_\lambda, a_\mu)$ dan $A(a_\mu, a_\lambda)$. Dengan demikian, Persamaan (2.42) dapat ditulis kembali dengan mengatur ulang bentuk-betnuk tersebut dan sifat skew symmetric dari A menjadi sifat bawaan

$$\begin{aligned} f(x) = &\sum_{a_i=a_\lambda} W_1(x; a_\lambda)f(a_\lambda) \\ &+ \sum_{a_\lambda<a_\mu} \left[W_2(x; a_\lambda, a_\mu) - W_3(x; a_\lambda, a_\mu)\right] A(a_\lambda, a_\mu) + g(\phi(x)) \end{aligned} \tag{2.49}$$

dengan

$$\begin{aligned} x = a_1^{n_1}a_2^{n_2}\ldots a_l^{n_l}, \quad W_1(x; a_\lambda) &:= \sum_{a_i=a_\lambda} n_i \\ W_2(x; a\lambda, a_\mu) &:= \sum_{i<j, a_i=a_\lambda, a_j=a_\mu} n_in_j \\ W_3(x; a\lambda, a_\mu) &:= \sum_{i>j, a_i=a_\lambda, a_j=a_\mu} n_in_j \end{aligned} \tag{2.50}$$

Dapat dipahami sebagai suatu kesepakatan bahwa $n_i = 0$ jika a_i tidak betul-betul digunakan dalam penulisan x. Dalam penyusunan ini, dapat dilihat bahwa f terdefinisi dengan baik pada G, dan f berada di $\mathcal{S}_1(G, H)$ dengan membuktikan bahwa : (i) untuk setiap a_λ yang tetap, pemetaan $x \to W_1(x; a_\lambda)$ berada di $\mathcal{S}_1(G, \mathbb{Z})$ karena pemetaan tersebut merupakan homomorfisma, (ii) untuk setiap pasangan yang fix dari $a_\lambda < a_\mu$, pemetaan $x \to W_2(x; a_\lambda, a_\mu) - W_3(x; a_\lambda, a_\mu)$ berada di $\mathcal{S}_1(G, \mathbb{Z})$ karena pemetaan tersebut merupakan komposisi dari proyeksi natural yang bersifat pada dari G ke grup bebas $\langle a_\lambda, a_\mu \rangle$ dengan dua pembangun, diikuti dengan pemetaan $u \to W_2(u; a_\lambda, a_\mu) - W_3(u; a_\lambda, a_\mu)$ dari bagian akhir ke $\mathbb{Z}$ yang diketahui merupakan solusi, (iii) $x \to g(\phi(x))$ berada di $\mathcal{S}_1(G, H)$ karena $\phi(xy) = \phi(xy^{-1})$ dan $2g = 0$. Ketunggalan dari pemetaan A terlihat dari (2.47), oleh karena itu pemetaan g juga tunggal. $\square$

Teorema dan Akibat diatas merupakan hasil utama dari solusi persamaan fungsional Jensen (1.4) yang dinormalisasi pada grup bebas.

2.2. **Persamaan fungsional $f(xy) + f(y^{-1}x) = 2f(x)$.** Pada bagian ini akan ditinjau persamaan fungsional (1.5) dengan kondisi yang dinormalisasi (1.6) dan akan ditunjukkan persamaan $\mathrm{Hom}(G, H) = \mathcal{S}_2(G, H)$ berlaku untuk grup $G = S_n$. Pembuktian untuk persamaan ini mengikuti langkah per langkah seperti yang diberikan untuk persamaan (1.4) pada bagian sebelumnya.

Berikut merupakan sifat-sifat persamaan fungsional Jensen (1.4) pada grup.

Proposisi 2.14. [8] *Misalkan $(G, \cdot)$ grup dan $(H, +)$ grup abelian. Misalkan $f \in \mathcal{S}_2(G, H)$ dan A kernel Cauchy dari f. Untuk setiap $x, x_i, y, y_i, z, u, v \in G, m, n \in \mathbb{Z}$ dan sebarang panjang $l \geqslant 1$ berlaku*

$$f(x^n) = nf(x); \tag{2.51}$$
$$f(xyz) + f(xzy) = 2f(xy) + 2f(xz) - 2f(x); \tag{2.52}$$
$$f(xyz) + f(yxz) = 2f(xz) + 2f(yz) - 2f(z); \tag{2.53}$$
$$f(xyz) - f(xzy) = 2f(yz) - 2f(y) - 2f(z); \tag{2.54}$$
$$2f(xyz) = 2f(xy) + 2f(xz) + 2f(yz) - 2f(x) - 2f(y) - 2f(z); \tag{2.55}$$
$$f(xy^2z) = f(xz) + 2f(y). \tag{2.56}$$
$$A(x^m, x^n) = 0; \tag{2.57}$$
$$A(x, y) = -A(y, x); \tag{2.58}$$
$$A(xy^2z, u) = A(xz, u); \tag{2.59}$$
$$A(u, xy^2z) = A(u, xz); \tag{2.60}$$
$$\begin{aligned}&A(x_1x_2\cdots x_l, y) \textit{ dan } A(x, y_1y_2\cdots y_l)\\ &\textit{merupakan invarian atas permutasi pada } \{1, 2, \ldots, l\}\end{aligned} \tag{2.61}$$
$$2A \textit{ merupakan bi-homomorfisma}; \tag{2.62}$$
$$4A = 0; \tag{2.63}$$
$$f(xuvy) = f(xvuy) + 2A(u, v). \tag{2.64}$$

2.2.1. *Solusi pada Grup Simetris S_n.* Berikut diberikan sifat-sifat untuk membuktikan teorema utama pada bagian ini.

Lemma 2.15. [4], *Misalkan $\sigma = (ab)$ dan $\tau = (bc)$ merupakan transposisi pada S_n dengan $a \neq c$. Untuk setiap $f \in \mathcal{S}_2(S_n, H)$ berlaku*

$$f(\sigma\tau) = f(\sigma) + f(\tau) = 0.$$

Lemma 2.16. [4] *Misalkan $\sigma = (ab)$ dan $\tau = (cd)$ merupakan transposisi-transposisi pada S_n dengan a, b, c, d elemen-elemen yang berbeda, maka untuk setiap $f \in \mathcal{S}_2(S_n, H)$ diperoleh*

$$f(\sigma\tau) = f(\sigma) + f(\tau) = 0.$$

Lemma 2.17. [4] *Untuk setiap $f \in \mathcal{S}_2(S_n, H)$ berlaku $2f(x) = 0$ untuk setiap $x \in S_n$.*

Akibat 2.18. [4] *Untuk setiap $f \in \mathcal{S}_2(S_n, H)$ dan untuk setiap $x, y, z \in S_n$ berlaku*

$$f(xyz) = f(xzy) = f(yxz).$$

Dengan demikian, urutan transposisi dari setiap permutasi $x \in S_n$ dapat diatur ulang sedemikian sehingga nilai $f(x)$ tidak berubah.

Lemma 2.19. [4] *Untuk setiap $f \in \mathcal{S}_2(S_n, H)$ dan untuk setiap $x \in S_n$, pernyataan berikut berlaku:*

(1) *Jika x merupakan permutasi genap maka $f(x) = 0$.*
(2) *Jika x merupakan permutasi ganjil, misalkan $x = \sigma_1 \ldots \sigma_{2s+1}$ untuk suatu s bilangan bulat positif, maka $f(x) = f(\sigma_r)$ dengan $r = 2s + 1$*

Menggunakan sifat-sifat diatas dibuktikan teorema utama solusi persamaan fungsional Jensen (1.5) pada grup simetris S_n.

Teorema 2.20. [4] *Untuk sebarang bilangan asli $n \geq 1$ dan sebarang grup abelian H, berlaku $\mathcal{S}_2(S_n, H) = \mathrm{Hom}(S_n, H)$.*

Bukti. Dengan menggunakan argumen yang sama untuk membuktikan Teorema 2.10 dan menggunakan Lemma 2.19 sebagai ganti Lemma 2.9, teorema utama pada bagian ini telah terbukti. □

2.2.2. *Solusi pada Grup Bebas.* Misalkan $\langle \mathcal{A} \rangle$ grup bebas pada $\mathcal{A}$. Untuk $|\mathcal{A}| = 1$, $\langle \mathcal{A} \rangle$ siklik, dan berdasarkan (2.51), diperoleh $\mathcal{S}_2(\langle \mathcal{A} \rangle, H) = \mathrm{Hom}(\langle \mathcal{A} \rangle, H)$. Selanjutnya, akan dibuktikan untuk $|\mathcal{A}| \geqslant 2$. Diberikan urutan linier $<$ pada $\mathcal{A}$. Setiap elemen $x \in G$ dapat ditulis dalam bentuk

$$x = a_{\lambda_1}^{n_1\lambda_1} a_{\lambda_2}^{n_1\lambda_2} \cdots a_{\lambda_k}^{n_1\lambda_k} a_{\lambda_1}^{n_2\lambda_1} a_{\lambda_2}^{n_2\lambda_2} \cdots a_{\lambda_k}^{n_2\lambda_k} \cdots a_{\lambda_1}^{n_k\lambda_1} a_{\lambda_2}^{n_k\lambda_2} \cdots a_{\lambda_k}^{n_k\lambda_k} \tag{2.65}$$

dengan huruf-huruf tersebut ditulis dalam urutan naik, yaitu $a_{\lambda_1} < a_{\lambda_2} < \cdots < a_{\lambda_k}$. Fungsi

$$W(x; a_\lambda) := \sum_{i=1}^{l} n_{i\lambda} \tag{2.66}$$

$$W(x; a_\lambda, a_\mu) := \sum_{j<i} n_{i\lambda} n_{j\mu}, \quad (a_\lambda < a_\mu) \tag{2.67}$$

digunakan sebagai dasar untuk menghasilkan solusi Persamaan (1.5) dengan (1.6). Fungsi karakteristik $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ pada bilangan bulat ganjil

$$\chi(n) = 1 \text{ jika } n \text{ ganjil}, \chi(n) = 0 \text{ jika } n \text{ genap} \tag{2.68}$$

akan digunakan pula dalam mencari solusi umum tersebut. Mula-mula diberikan solusi saat $\mathcal{A}$ mempunyai tepat dua pembangun a_1, a_2, diurutkan oleh $a_1 < a_2$.

Proposisi 2.21. [8] *Fungsi $f \in \mathcal{S}_2(\langle a_1, a_2\rangle, H)$ jika dan hanya jika f mempunyai representasi*

$$\begin{aligned} f(x) =& W(x; a_1)h_1 + W(x; a_2)h_2 \\ &+ [2W(x; a_1, a_2) + \chi(W(x; a_1)W(x; a_2))]h_3 \end{aligned} \tag{2.69}$$

untuk setiap $x \in \langle a_1, a_2\rangle$. Berdasarkan pada Persamaan (2.65)*,*

$$x = a_1^{n_{11}} a_2^{n_{12}} a_1^{n_{21}} a_2^{n_{22}} \cdots a_1^{n_{l1}} a_2^{n_{l2}},$$

W dan χ didefinisikan oleh Persamaan (2.66),(2.67)*, dan* (2.68)*, dan $h_1, h_2, h_3 \in H$ merupakan kostanta dengan*

$$4h_3 = 0. \tag{2.70}$$

Bukti. Misalkan $f \in \mathcal{S}_2(\langle a_1, a_2\rangle, H)$. Dengan menggunakan Persamaan (2.64), diperoleh

$$f(a_1^{n_{11}} a_2^{n_{12}} a_1^{n_{21}} a_2^{n_{22}}) = f(a_1^{n_{11}} a_1^{n_{21}} a_2^{n_{12}} a_2^{n_{22}}) + 2A(a_2^{n_{12}}, a_1^{n_{21}}),$$

$$\begin{aligned} &f(a_1^{n_{11}} a_2^{n_{12}} a_1^{n_{21}} a_2^{n_{22}} a_1^{n_{31}} a_2^{n_{32}}) \\ =& f(a_1^{n_{11}} a_1^{n_{21}} a_2^{n_{12}} a_2^{n_{22}} a_1^{n_{31}} a_2^{n_{32}}) + 2A(a_2^{n_{12}}, a_1^{n_{21}}) \\ =& f(a_1^{n_{11}} a_1^{n_{21}} a_2^{n_{12}} a_1^{n_{31}} a_2^{n_{22}} a_2^{n_{32}}) + 2A(a_2^{n_{22}}, a_1^{n_{31}}) + 2A(a_2^{n_{12}}, a_1^{n_{21}}) \\ =& f(a_1^{n_{11}} a_1^{n_{21}} a_1^{n_{31}} a_2^{n_{12}} a_2^{n_{22}} a_2^{n_{32}}) + 2A(a_2^{n_{12}}, a_1^{n_{31}}) + 2A(a_2^{n_{22}}, a_1^{n_{31}}) \\ &+ 2A(a_2^{n_{12}}, a_1^{n_{21}}). \end{aligned}$$

Kemudian cara ini dilanjutkan, sehingga diperoleh untuk l yang umum sebagai berikut

$$\begin{aligned} &f(a_1^{n_{11}} a_2^{n_{12}} a_1^{n_{21}} a_2^{n_{22}} \cdots a_1^{n_{l1}} a_2^{n_{l2}}) \\ =& f(a_1^{n_{11}} a_1^{n_{21}} \cdots a_1^{n_{l1}} a_2^{n_{12}} a_2^{n_{22}} \cdots a_2^{n_{l2}}) + \sum_{j<i} 2A(a_2^{n_{j2}, a_1^{n_{i1}}}). \end{aligned} \tag{2.71}$$

Berdasarkan Persamaan (2.51), (2.57)-(2.60) diperoleh

$$\begin{aligned} &f(a_1^{n_{11}} a_1^{n_{21}} \cdots a_1^{n_{l1}} a_2^{n_{12}} a_2^{n_{22}} \cdots a_2^{n_{l2}}) \\ =& f(a_1^{W(x;a_1)} a_2^{W(x;a_2)}) \\ =& f(a_1^{W(x;a_1)}) + f(a_2^{W(x;a_2)}) + A(a_1^{W(x;a_1)}, a_2^{W(x;a_2)}) \\ =& W(x; a_1)f(a_1) + W(x; a_2)f(a_2) \\ &= +\chi(W(x; a_1)W(x; a_2))A(a_1, a_2). \end{aligned} \tag{2.72}$$

Kemudian, berdasarkan Persamaan (2.58), (2.63), dan (2.62) diperoleh

$$\begin{aligned}\sum_{j<i} 2A(a_2^{n_{j2}}, a_1^{n_{i1}}) &= \sum_{j<i} 2A(a_1^{n_{i1}}, a_2^{n_{j2}}) \\ &= \sum_{j<i} 2n_{i1}n_{j2}A(a_1, a_2) \\ &= 2W(x; a_1, a_2)A(a_1, a_2),\end{aligned} \tag{2.73}$$

Selanjutnya, dimasukkan persamaan di atas ke dalam Persamaan (2.71), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}&f(a_1^{n_{11}}a_2^{n_{12}}a_1^{n_{21}}a_2^{n_{22}}\cdots a_1^{n_{l1}}a_2^{n_{l2}}) \\ =&W(x; a_1)f(a_1) + W(x; a_2)f(a_2) \\ &+ 2W(x; a_1, a_2) + \chi(W(x; a_1)W(x; a_2)A(a_1, a_2).\end{aligned} \tag{2.74}$$

Ini membuktikan representasi (2.69) dengan

$$h_1 = f(a_1), h_2 = f(a_2), h_3 = A(a_1, a_2). \tag{2.75}$$

Berdasarkan Persamaan (2.63), diperoleh (2.70), yaitu $4h_3 = 0$.

Sebaliknya, misalkan $h_1, h_2, h_3 \in H$ merupakan konstanta dengan $4h_3 = 0$, dan misalkan f didefinisikan oleh Persamaan (2.69). Diperhatikan bahwa

$$x \to W(x; a_1), x \to W(x; a_2)$$

merupakan homomorfisma dari G ke $\mathbb{Z}$, sehingga

$$x \to W(x; a_1)h_1 + W(x; a_2)h_2$$

berada di $\mathcal{S}_2(\langle a_1, a_2\rangle, H)$. Oleh karena itu $f \in \mathcal{S}_2(\langle a_1, a_2\rangle, H)$ jika

$$x \to \{2W(x; a_1, a_2) + \chi(W(x; a_1)W(x; a_2))\}h_3$$

berada di $\mathcal{S}_2(\langle a_1, a_2\rangle, H)$. Karena $4h_3 = 0$, perlu ditunjukkan bahwa

$$g(x) := 2W(x; a_1a_2) + \chi(W(x; a_1)W(x; a_2)) \mod 4$$

berada di $\mathcal{S}_2(\langle a_1, a_2\rangle, \mathbb{Z}_4)$. Untuk tujuan ini, diperhatikan fungsi-fungsi

$$F_1(x) := W(x, a_1), \quad F_2(x) := W(x, a_2), \quad F_4(x) := W(x; a_1, a_2) \tag{2.76}$$

memenuhi relasi

$$\begin{aligned}F_1(xy) &= F_1(x) + F_1(y), \quad F_2(xy) = F_2(x) + F_2(y), \\ F_4(xy) &= F_4(x) + F_4(y) + F_2(x)F_1(y)\end{aligned} \tag{2.77}$$

untuk setiap $x, y \in \langle a_1, a_2\rangle$ dengan nilai-nilai fungsi yang termuat di $\mathbb{Z}$ Persamaan (2.74), (2.76)). Selanjutnya

$$g(xy) + g(y^{-1}x) = 2g(x)$$

jika dan hanya jika

$$\begin{aligned}&2F_4(xy) + \chi(F_1(xy)F_2(xy)) + 2F_4(y^{-1}x) + \chi(F_1(y^{-1}x)F_2(y^{-1}x)) \\ &= 2\chi(F_1(x)F_2(x)) \mod 4\end{aligned}$$

jika dan hanya jika

$$\begin{aligned}&\chi([F_1(x)+F_1(y)][F_2(x)+F_2(y)])+\chi([-F_1(y)+F_1(x)][-F_2(y)+F_2(x)])\\&\quad+2F_4(xy)+2F_4(y^{-1}x)=2\chi(F_1(x)F_2(x)) \mod 4\end{aligned}$$

jika dan hanya jika

$$\begin{aligned}&2\chi([F_1(x)+F_1(y)][F_2(x)+F_2(y)])+2F_4(xy)+2F_4(y^{-1}x)\\&\quad=2\chi(F_1(x)F_2(x)) \mod 4\end{aligned}$$

jika dan hanya jika

$$\begin{aligned}&\chi([F_1(x)+F_1(y)][F_2(x)+F_2(y)])+F_4(xy)+F_4(y^{-1}x)\\&\quad=\chi(F_1(x)F_2(x)) \mod 2\end{aligned}$$

jika dan hanya jika

$$\begin{aligned}&\chi(F_1(x)F_2(x)+F_1(y)F_2(y)+F_1(x)F_2(y)+F_1(y)F_2(x))\\&\quad+F_4(xyy^{-1}x)-F_2(xy)F_1(y^{-1}x)=\chi(F_1(x)F_2(x)) \mod 2\end{aligned}$$

jika dan hanya jika

$$\begin{aligned}&\chi(F_1(x)F_2(x)+F_1(y)F_2(y)+F_1(x)F_2(y)+F_1(y)F_2(x))\\&\quad+F_4(x^2)-(F_2(x)+F_2(y))(-F_1(y)+F_1(x))=\chi(F_1(x)F_2(x)) \mod 2\end{aligned}$$

jika dan hanya jika

$$\begin{aligned}&\chi(F_1(x)F_2(x)+F_1(y)F_2(y)+F_1(x)F_2(y)+F_1(y)F_2(x))+2F_4(x)\\&\quad+F_2(x)+F_1(x)-(F_2(x)F_2(y))(-F_1(y)+F_1(x))\\&\quad=\chi(F_1(x)F_2(x)) \mod 2\end{aligned}$$

jika dan hanya jika

$$\begin{aligned}&\chi(F_1(x)F_2(x)+F_1(y)F_2(y)+F_1(x)F_2(y)+F_1(y)F_2(x))\\&\quad+F_1(y)F_2(y)+F_1(x)F_2(y)+F_1(y)F_2(x)=\chi(F_1(x)F_2(x)) \mod 2\end{aligned}$$

Persamaan terakhir bernilai benar, saat $\chi(m+n)+n=\chi(m) \mod 2$ untuk setiap $m,n\in\mathbb{Z}$. Ini membuktikan g memenuhi Persamaan (1.5). Jelas bahwa $g(e)=0$, sehingga $g\in\mathcal{S}_2(\langle a_1,a_2\rangle,\mathbb{Z}_4)$. Dengan demikian, $f\in\mathcal{S}_2(\langle a_1,a_2\rangle,H)$. □

Misalkan $G/\langle square\rangle$ menotasikan grup faktor dari G untuk semua kuadrat di G sama dengan e.

Teorema 2.22. [8] *Fungsi $f\in\mathcal{S}_2(\langle\mathcal{A}\rangle,H)$ jika dan hanya jika f mempunyai representasi*

$$\begin{aligned}f(x)=&\sum_{a_\lambda}W(x;a_\lambda)f(a_\lambda)+\sum_{a_\lambda<a_\mu}[2W(x;a_\lambda,a_\mu)\\&+\chi(W(x;a_\lambda)W(x;a_\mu))][f(a_\lambda a_\mu)-f(a_\lambda)-f(a_\mu)]\\&+g(\phi(x))\end{aligned}\tag{2.78}$$

untuk setiap $x \in \langle \mathcal{A} \rangle$. Fungsi W dan χ di sini didefinisikan oleh Persamaan (2.65) - (2.68), ϕ merupakan epimorfisma natural dari $\langle \mathcal{A} \rangle$ ke $\langle \mathcal{A} \rangle / \langle square \rangle$ memetakan semua kuadrat elemen ke e, $g : \langle \mathcal{A} \rangle / \langle square \rangle \to H$ merupakan sebarang pemetaan yang memenuhi kendala-kendala :

$$2g = 0, \quad g(a_{\lambda_1} a_{\lambda_2} \cdots a_{\lambda_l}) = 0 \text{ untuk } l \geqslant 2, a_{\lambda_i} \in \mathcal{A}, \tag{2.79}$$

dan $f(a_\lambda), f(a_\mu), f(a_\lambda a_\mu)$ dengan $a_\lambda < a_\mu$ merupakan nilai awal dari f yang memenuhi kendala :

$$4[f(a_\lambda a_\mu) - f(a_\lambda) - f(a_\mu)] = 0. \tag{2.80}$$

Bukti. Misalkan $f \in \mathcal{S}_2(\langle A \rangle, H)$. Akan dibuktikan representasi menggunakan induksi pada k, banyaknya pembangun yang dibutuhkan untuk menulis x dalam bentuk (2.65). Mula-mula, misalkan g_k merupakan suatu restriksi dari g ke *word* sedemikian sehingga paling banyak k huruf yang berbeda. Dengan demikian, barisan $g_0, g_1, g_2, \ldots$ merupakan suatu barisan naik dari fungsi-fungsi yang gabungannya adalah g. Diperhatikan kembali penjelasan pada bagian awal dari pembahasan solusi general untuk grup bebas. Dengan menggunakan kesepakatan bahwa $\sum_{a_\lambda < a_\mu} = \sum_\varnothing = 0$, Persamaan (2.78) bernilai benar untuk $k = 0, 1$ dengan mengambil $g_0 := 0, g_1 := 0$. Berdasarkan Proposisi 2.21, Persamaan (2.78) juga bernilai benar untuk $k = 2$ dengan $g_2 := 0$. Kendala (2.79) dipenuhi oleh g_0, g_1, g_2. Selanjutnya akan dilakukan langkah induksi matematika. Sebagai hipotesis induksi, dimisalkan bahwa untuk suatu $k \geqslant 3$, representasi (2.78) bernilai benar, yaitu x dapat dituliskan dalam pembangun-pembangun sebanyak kurang dari k. Pada penulisan

$$x = a_{\lambda_1}^{n_1\lambda_1} a_{\lambda_2}^{n_1\lambda_2} \cdots a_{\lambda_k}^{n_1\lambda_k} a_{\lambda_1}^{n_2\lambda_1} a_{\lambda_2}^{n_2\lambda_2} \cdots a_{\lambda_k}^{n_2\lambda_k} \cdots a_{\lambda_1}^{n_k\lambda_1} a_{\lambda_2}^{n_k\lambda_2} \cdots a_{\lambda_k}^{n_k\lambda_k} \tag{2.81}$$

misalkan

$$y_i := a_{\lambda_2}^{n_i\lambda_2} \cdots a_{\lambda_k}^{n_i\lambda_k}, \quad 1 \leqslant i \leqslant l. \tag{2.82}$$

Berdasarkan Teorema (2.59) diperoleh

$$\begin{aligned} f(x) =& f(a_{\lambda_1}^{n_1\lambda_1} y_1 a_{\lambda_1}^{n_2\lambda_1} y_2 \cdots a_{\lambda_1}^{n_l\lambda_1} y_l) \\ =& f(a_{\lambda_1}^{n_1\lambda_1 + n_2\lambda_1 + \cdots + n_l\lambda_1} y_1 y_2 \cdots y_l) + \sum_{j<i} 2A(y_j, a_{\lambda_1}^{n_i\lambda_1}) \\ =& f(a_{\lambda_1}^{W(x;a_{\lambda_1})} y_1 y_2 \cdots y_l) + \sum_{j<i} 2A(y_j, a_{\lambda_1}^{n_i\lambda_1}) \\ =& f(a_{\lambda_1}^{W(x;a_{\lambda_1})}) + f(y_1 y_2 \cdots y_l) + A(a_{\lambda_1}^{W(x;a_{\lambda_1})}, y_1 y_2 \cdots y_l) \\ &+ \sum_{j<i} 2A(y_j, a_{\lambda_1}^{n_i\lambda_1}) \\ =& f(a_{\lambda_1}^{W(x;a_{\lambda_1})}) + f(y_1 y_2 \cdots y_l) + A(a_{\lambda_1}^{W(x;a_{\lambda_1})}, a_{\lambda_2}^{W(x;a_{\lambda_2})} \cdots a_{\lambda_k}^{W(x;a_{\lambda_k})}) \\ &+ \sum_{j<i} \sum_{p=2}^{k} 2A(a_{\lambda_p}^{n_j\lambda_p}, a_{\lambda_1}^{n_i\lambda_1}) \end{aligned} \tag{2.83}$$

Berdasarkan hipotesis induksi, dan diperhatikan bahwa $y_1y_2\cdots y_l$ ditulis dengan kurang dari k pembangun, diperoleh

$$\begin{aligned}
f(y_1y_2\cdots y_l) = {} & \textstyle\sum_{p=2}^{k} W(x;a_{\lambda_p})f(a_{\lambda_p}) + \displaystyle\sum_{2\leqslant p<q}[2W(x;a_{\lambda_p},a_{\lambda_q})\\
& +\chi(W(x;a_{\lambda_p})W(x;a_{\lambda_q})]\\
& \quad [f(a_{\lambda_p}a_{\lambda_q}) - f(a_{\lambda_p}) - f(a_{\lambda_q})]\\
& +g_{k-1}(\phi(y_1y_2\cdots y_l))\\
= {} & \textstyle\sum_{p=2}^{k} W(x;a_{\lambda_p})f(a_{\lambda_p}) + \displaystyle\sum_{2\leqslant p<q}[2W(x;a_{\lambda_p},a_{\lambda_q})A(a_{\lambda_p},a_{\lambda_q})\\
& + \sum_{2\leqslant p<q} A(a_{\lambda_p}^{W(x;a_{\lambda_p})}, a_{\lambda_q}^{W(x;a_{\lambda_q})}) + g_{k-1}(\phi(y_1y_2\cdots y_l))
\end{aligned}$$

dengan g_{k-1} yang memenuhi (2.79). Dengan memasukkan ini pada (2.83), diperoleh

$$\begin{aligned}
f(x) = {} & \sum_{p=1}^{k} W(x;a_{\lambda_p})f(a_{\lambda_p}) + \sum_{j<i}\sum_{p=2}^{k} 2A(a_{\lambda_p}^{n_j\lambda_p}, a_{\lambda_1}^{n_i\lambda_1})\\
& + \sum_{1\leqslant p<q} 2W(x;a_{\lambda_p},a_{\lambda_q})A(a_{\lambda_p},a_{\lambda_q}) - \sum_{1<q} 2W(x;a_{\lambda_1},a_{\lambda_q})A(a_{\lambda_1},a_{\lambda_q})\\
& + A(a_{\lambda_1}^{W(x;a_{\lambda_1})}, a_{\lambda_2}^{W(x;a_{\lambda_2})}\cdots a_{\lambda_k}^{W(x;a_{\lambda_k})}) + \sum_{2\leqslant p<q} A(a_{\lambda_p}^{W(x;a_{\lambda_p})}, a_{\lambda_q}^{W(x;a_{\lambda_q})})\\
& + A(a_{\lambda_1}^{W(x;a_{\lambda_1})}, a_{\lambda_2}^{W(x;a_{\lambda_2})}\cdots a_{\lambda_k}^{W(x;a_{\lambda_k})}) + g_{k-1}(\phi(y_1y_2\cdots y_l)).
\end{aligned}$$

Tetapi

$$\begin{aligned}
-\sum_{1<q} 2W(x;a_{\lambda_1},a_{\lambda_q})A(a_{\lambda_1},a_{\lambda_q}) &= -\sum_{1<q} 2\sum_{j<i} n_{i\lambda_1}n_{j\lambda_q}A(a_{\lambda_1},a_{\lambda_q})\\
&= -\sum_{1<q}\sum_{j<i} 2A(a_{\lambda_1}^{n_i\lambda_1}, a_{\lambda_q}^{n_j\lambda_q})\\
&= -\sum_{p=2}^{k}\sum_{j<i} 2A(a_{\lambda_1}^{n_i\lambda_1}, a_{\lambda_p}^{n_j\lambda_p})\\
&= -\sum_{j<i}\sum_{p=2}^{k} 2A(a_{\lambda_p}^{n_j\lambda_p}, a_{\lambda_1}^{n_i\lambda_1})
\end{aligned}$$

komputasi sebelumnya dari $f(x)$ dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} f(x) =& \sum_{a_\lambda} W(x; a_\lambda) f(a_\lambda) + \sum_{1 \leqslant p < q} 2W(x; a_{\lambda_p}, a_{\lambda_q}) A(a_{\lambda_p}, a_{\lambda_q}) \\ &+ \sum_{1 \leqslant p < q} A(a_{\lambda_p}^{W(x;a_{\lambda_p})}, a_{\lambda_q}^{W(x;a_{\lambda_q})}) \\ &+ \{A(a_{\lambda_1}^{W(x;a_{\lambda_1})}, a_{\lambda_2}^{W(x;a_{\lambda_2})} \cdots a_{\lambda_k}^{W(x;a_{\lambda_k})}) \\ &- \sum_{1<q} A(a_{\lambda_1}^{W(x;a_{\lambda_1})}, a_{\lambda_q}^{W(x;a_{\lambda_q})}) \\ &+ g_{k-1}(\phi(y_1 y_2 \cdots y_l))\}. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Untuk setiap a_λ, $x \to W(x; a_\lambda)$ merupakan homomorfisma pada G, dengan demikian memenuhi (1.5) dan (1.6). Berdasarkan Proposisi 2.21, untuk setiap pasangan $a_{\lambda_p} < a_{\lambda_q}$, $x \to 2W(x; a_{\lambda_p}, \lambda_q) A(a_{\lambda_p}, a_{\lambda_q}) + A(a_{\lambda_p}^{W(x;a_{\lambda_p})}, a_{\lambda_q}^{W(x;a_{\lambda_q})})$ memenuhi (1.5) dan (1.6). Oleh karena itu, sisa dari Persamaan (2.84), yaitu

$$\begin{aligned} h(x) :=& A(a_{\lambda_1}^{W(x;a_{\lambda_1})}, a_{\lambda_2}^{W(x;a_{\lambda_2})} \cdots a_{\lambda_k}^{W(x;a_{\lambda_k})}) \\ &- \sum_{1<q} A(a_{\lambda_1}^{W(x;a_{\lambda_1})}, a_{\lambda_q}^{W(x;a_{\lambda_q})}) + g_{k-1}(\phi(y_1 y_2 \cdots y_l)) \end{aligned} \tag{2.85}$$

merupakan solusi dari (1.5) dan (1.6) pada $\langle a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \ldots, a_{\lambda_k} \rangle$. Lebih lanjut,

$$2h(x) = 0 \tag{2.86}$$

diperoleh dari Persamaan (2.62) dan $2g_{k-1} = 0$. Berdasarkan Persamaan (2.56), diterapkan pada h, diperoleh

$$h(xy^2z) = h(xz)$$

untuk setiap *word* x, y, z ditulis atas $a_{\lambda_1}, \ldots, a_{\lambda_k}$. Ini ekuivalen dengan kondisi faktorisasi bahwa

$$h(x) = h(\phi(x)).$$

Dengan demikian dapat didefinisikan g_k pada kelas-kelas kuadrat dari $\langle a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \ldots, a_{\lambda_k} \rangle$ dengan

$$g_k(\phi(x)) := h(x).$$

Fakta bahwa $2g_k = 0$ diperoleh dari Persamaan (2.86). Dengan meletakkan ini pada Persamaan (2.84) diperoleh representasi (2.78) untuk x yang ditulis dalam k huruf. Lebih lanjut, dapat pula ditunjukkan bahwa, g_k memperluas g_{k-1}. Hal ini telah melengkapi pembuktian secara induksi bahwa representasi berlaku untuk setiap k, dengan g merupakan gabungan dari semua g_k. Untuk arah sebaliknya adalah jelas, karena persamaan dari berhingga karakter, yaitu untuk $x, y \in \langle \mathcal{A} \rangle$ yang diberikan, terdapat berhingga banyaknya huruf $a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \ldots, a_{\lambda_k}$ sedemikian sehingga $x, y \in \langle a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \ldots, a_{\lambda_k} \rangle$.

$\square$

3. PENUTUP

Untuk penulisan kedepannya disarankan untuk membahas persamaan fungsional Jensen pada grup linier $GL_n(\mathbb{Z})$, grup *alternating* A_n, dan grup abelian berhingga.

Ucapan terima kasih*. Terima kasih sebesar-besarnya kepada Che Tat Ng, Công-Trinh Lê, dan Trung-Hiêu Thái, atas penelitiannya yang menjadi sumber inspirasi utama dalam penelitian ini.

Referensi

[1] Dhombres, J. , *Some Aspects of Functional Equation*, Chulalongkorn University Press, Bangkok, 1979.
[2] Dummit, D. S., Foote, R. M., *Abstract Algebra*, Wiley, New York, 2003.
[3] Fraleigh, J. B., Katz, V. J. , *A First Course in Abstract Algebra*, Addison-Wesley, 2003.
[4] Lê, CT., Thái, TH., Jensen's functional equation on the symmetric group S_n, *Aequationes Mathematicae*, vol 82. (2011), hal. 269-276.
[5] Malik, D. S., Mordeson, J. N., dan Sen, M. K. , *Fundamentals of Abstract Algebra*, McGraw-Hill Companies, Inc., New York, 1997.
[6] Ng, C. T., Jensen's functional equation on groups, *Aequationes Math*, vol 39. (1990), hal. 85-99.
[7] Ng, C. T., Jensen's functional equation on groups II, *Aequationes Math*, vol 58. (1999), hal. 311-320.
[8] Ng, C. T., Jensen's functional equation on groups III, *Aequationes Math*, vol 62. (2001), hal. 143-159.

Febyola* (Penulis Korespondensi)
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia
febyola@ugm.ac.id

Yeni Susanti
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia
yeni_math@ugm.ac.id