Jurnal Matematika Thales (JMT): 2020 ISSN: 2715-1891
Vol. 02 No. 01

SIFAT-SIFAT MORFISMA DI DALAM KATEGORI RUANG PENUTUP RUANG TOPOLOGIS YANG TERHUBUNG LINTASAN

(ON THE MORPHISMS OF THE CATEGORY OF PATH CONNECTED COVERING SPACES)

VALENTINO RISALI*, INDAH EMILIA WIJAYANTI

Abstrak. Untuk sebarang ruang topologis X dapat dibentuk Cov_X yaitu kategori ruang penutup X yang terhubung lintasan. Pada tulisan ini akan dibahas syarat perlu dan cukup eksistensi morfisma antara dua ruang penutup yang terhubung lintasan lokal. Untuk sebarang $x_0 \in X$ dan grup fundamental $G = \pi_1(X, x_0)$, dapat dibentuk kategori $SetG$, yaitu kategori semua himpunan yang dilengkapi aksi kanan oleh G. Selanjutnya dibentuk fungtor F dari Cov_X ke $SetG$. Dalam tulisan dibuktikan bahwa F bersifat *fully faithful* jika X terhubung lintasan dan terhubung lintasan lokal. Akibatnya untuk mengidentifikasi morfisma-morfisma antara dua obyek A dan B di Cov_X dapat dilakukan dengan cara melihat sifat morfisma-morfisma antara $F(A)$ dan $F(B)$.

Kata-kata kunci: grup fundamental, ruang penutup, kategori ruang penutup, *fungtor faithful*.

Abstract. For any topological space X, we can construct the category of path connected covering spaces of X, denoted by Cov_X. In this paper we study a sufficient and necesarry condition for the existence of morphism between two locally path connected covering spaces. For every $x_0 \in X$ and fundamental group $G = \pi_1(X, x_0)$, we can construct the category of sets with right action of G, denoted by $SetG$. Furthermore, we can define a functor F from Cov_X to $SetG$. We proof that the functor F is fully faithul if X is path connected and locally path connected. From this result, we can identify morphisms between A and B in Cov_X by using the properties of morphisms between $F(A)$ and $F(B)$.

Keywords: fundamental group, covering space, category of covering spaces, faithful functor.

2010 Mathematics Subject Classification: 18B30 , 57M10

1. PENDAHULUAN

Untuk sebarang ruang topologis X dapat dibentuk grup fundamental relatif terhadap titik basis x_0 yang dinotasikan dengan $\pi_1(X, x_0)$ [2]. Grup fundamental merupakan alat penting untuk mempelajari sifat-sifat ruang topologis dan pada tulisan ini akan digunakan untuk membentuk suatu kategori. Lebih jauh, dari sebarang ruang topologis X dapat dibentuk suatu kategori dengan obyek-obyek berupa ruang-ruang penutup X yang dinotasikan dengan (E_1, p_1) yang terhubung lintasan. Adapun morfisma-morfismanya adalah homomorfisma penutup antar dua ruang penutup yang dilengkapi operasi komposisi fungsi biasa. Kategori tersebut dinotasikan dengan Cov_X [4]. Untuk sebarang $x_0 \in X$ dan grup fundamental $G = \pi_1(X, x_0)$, dapat dibentuk kategori $SetG$, yaitu kategori semua himpunan yang dilengkapi aksi kanan oleh G. Lebih jauh lagi di antara dua kategori yang terbentuk dapat dihubungkan dengan suatu fungtor F dari Cov_X ke $SetG$. Dasar-dasar pengertian kategori dan fungtor dirujuk dari pustaka [6].

Pada tulisan ini akan dibahas morfisma-morfisma pada Cov_X. Pertama akan diberikan syarat perlu dan cukup eksistensi morfisma dari (E_1, p_1) ke (E_2, p_2) dengan asumsi tambahan E_1 dan E_2 keduanya terhubung lintasan lokal. Alat yang digunakan adalah grup fundamental dari X dan sifat pada ruang penutup (Teorema 2.9). Dengan demikian permasalahan menentukan eksistensi morfisma pada Cov_X ekuivalen dengan menyelesaikan masalah aljabar.

Kemudian akan diidentifikasi morfisma-morfisma dari (E_1, p_1) ke (E_2, p_2) untuk kasus X terhubung lintasan dan terhubung lintasan lokal. Untuk menjawab permasalahan ini digunakan kategori $SetG$ dengan $G = \pi_1(X, x_0)$. Selanjutnya dengan memanfaatkan ketunggalan pengangkatan suatu lintasan dapat didefinisikan fungtor kovarian F dari Cov_X ke $SetG$ [5].

Berdasarkan pemikiran yang terinspirasi dari hasil di [1] pada tulisan ini dibuktikan bahwa fungtor F bersifat *fully faithful* dengan menambah syarat ruang topologis X terhubung lintasan dan terhubung lintasan lokal. Akibatnya terdapat korespondensi satu-satu antara $Mor((E_1, p_1), (E_2, p_2))$ dan $Mor(p_1^{-1}(x_0), p_2^{-1}(x_0))$ (Akibat 3.11). Dengan demikian disimpulkan bahwa untuk mengidentifikasi morfisma-morfisma dari (E_1, p_1) ke (E_2, p_2) dapat dilakukan dengan cara mengidentifikasi semua morfisma dari $p_1^{-1}(x_0)$ ke $p_2^{-1}(x_0)$. Tulisan ini juga memberikan contoh penggunaan hasil yang sudah dibuktikan untuk kasus di ruang topologis $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ yang dipandang sebagai subruang dari $\mathbb{R}^2$ yaitu pada Contoh 3.12 dan Contoh 3.13. Pada kedua contoh tersebut notasi (S^1, p_n) untuk setiap bilangan asli n menyatakan ruang penutup dari S^1 dengan pemetaan penutup p_n yang memiliki definisi $p_n(z) = z^n$ untuk setiap $z \in S^1$ dimana S^1 dipandang sebagai himpunan bagian $\mathbb{C}$. Untuk penjelasan lebih lanjut bisa diperhatikan pada Contoh 2.4. Dalam keseluruhan tulisan ini, notasi

$f : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ menyatakan f merupakan pemetaan dari X ke Y dengan $f(x) = y$.

2. RUANG PENUTUP SUATU RUANG TOPOLOGIS

Pada bagian ini akan dijelaskan tentang ruang penutup ruang topologis. Lintasan di ruang topologis X dengan titik awal x dan titik akhir y adalah pemetaan kontinu dari $I = [0, 1]$ ke X dengan $f(0) = x$ dan $f(1) = y$. Khususnya jika f lintasan dengan $f(0) = x_0 = f(1)$, maka f disebut loop di X dengan titik basis x_0. Himpunan semua lintasan di X dinotasikan dengan $P(X)$ dan himpunan semua loop di X dengan titik basis x_0 yang dinotasikan dengan $\Omega(X, x_0)$. Jika $f, g \in P(X)$ dengan $f(1) = g(0)$, didefinisikan

$$(f \star g)(t) = \begin{cases} f(2t) & , 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(2t-1) & , 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

yang merupakan lintasan di X dari $f(0)$ ke $g(1)$. Lintasan invers dari f dinotasikan $f^{-1} : I \longrightarrow X$ didefinisikan sebagai $f^{-1}(t) = f(1-t)$ untuk setiap $t \in I$.

Pada $P(X)$ didefinisikan relasi $\simeq_p$, yaitu untuk setiap $f, g \in P(X)$, $f \simeq_p g$ jika dan hanya jika $f(1) = g(1)$, $f(0) = g(0)$ dan terdapat pemetaan kontinu $F : I \times I \longrightarrow X$ sehingga $F(t, 0) = f(t), F(t, 1) = g(t), F(0, s) = f(0), F(1, s) = f(1)$ untuk setiap $s, t \in I$. Selanjutnya F disebut homotopi antara f dan g dan ditulis $F : f \simeq_p g$. Dapat dibuktikan bahwa relasi $\simeq_p$ merupakan relasi ekuivalensi [2]. Himpunan kelas-kelas ekuivalensi yang terbentuk dinotasikan dengan $\pi_1(X, x_0)$. Untuk setiap $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$ didefinisikan $[f] \circ [g] = [f \star g]$. Himpunan kelas-kelas $(\pi_1(X, x_0), \circ)$ merupakan grup yang selanjutnya disebut grup fundamental dari X dengan titik basis x_0. Untuk sebarang pemetaan kontinu $\phi : X \longrightarrow Y$ dengan $\phi(x_0) = y_0$ dapat didefinisikan homomorfisma grup $\phi_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ dengan $\phi_*([f]) = [p \circ f]$ untuk setiap $[f] \in \pi_1(X, x_0)$.

Ruang topologis X dikatakan terhubung lintasan jika untuk setiap $x, y \in X$ terdapat lintasan $f : I \longrightarrow X$ sehingga $f(0) = x$ dan $f(1) = y$. Ruang topologis X dikatakan terhubung lintasan lokal jika untuk setiap $x \in X$ dan persekitaran terbuka U dari x terdapat persekitaran terbuka $V \subset U$ dari x yang terhubung lintasan. Pada bagian ini hanya diperhatikan ruang penutup yang bersifat terhubung lintasan dan terhubung lintasan lokal. Berikut akan diberikan pengertian ruang penutup dan sifat-sifat dasarnya.

Definisi 2.1 ([2]) *Diketahui $p : E \longrightarrow X$ fungsi kontinu yang surjektif. Himpunan terbuka $U \subset X$ dikatakan tertutup rata oleh p (evenly covered by p) jika $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} S_j$ dengan S_j terbuka, $S_i \cap S_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$ dan $p|_{S_j} : S_j \longrightarrow U$ merupakan homeomorfisma untuk setiap $j \in J$.Himpunan terbuka S_j disebut lembaran (sheet).*

Definisi 2.2 ([2]) *Pasangan (E, p) disebut ruang penutup (covering space) dari ruang topologis X jika:*

(1) $p : E \longrightarrow X$ kontinu dan surjektif;

(2) untuk setiap $x \in X$ terdapat persekitaran terbuka U dari x yang tertutup rata oleh p.

Pemetaan p disebut pemetaan penutup (covering map).

Selanjutnya diberikan contoh ruang penutup ruang topologis.

Contoh 2.3 *Diperhatikan $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 = \{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}$ dengan*

$$p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$

Himpunan terbuka $U_1 = \{(x, y) \in S^1 : x > 0\}$ tertutup rata oleh p karena $p^{-1}(U_1) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4})$ dengan $\{(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4})\}_{n\in\mathbb{N}}$ saling asing dan $p\,|_{V_n}: V_n \longrightarrow U_1$ merupakan homeomorfisma. Secara analog, $U_2 = \{(x, y) \in S^1 : y > 0\}$, $U_3 = \{(x, y) \in S^1 : x < 0\}$ dan $U_4 = \{(x, y) \in S^1 : y < 0\}$ juga tertutup rata oleh p. Untuk sebarang $x \in S^1$ berlaku x anggota salah satu dari $U_i, i = 1, 2, 3, 4$. Jadi, $(\mathbb{R}, p)$ ruang penutup dari S^1.

Contoh 2.4 *Diperhatikan S^1 yang dipandang sebagai himpunan bagian $\mathbb{C}$, yaitu*

$$S^1 = \{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

Untuk sebarang bilangan asli n, didefinisikan $p_n : S^1 \longrightarrow S^1$ dengan $p_n(z) = z^n$. Diperoleh p kontinu dan surjektif. Diperhatikan himpunan terbuka

$$U_1 = \{e^{i\theta} \mid 0 < \theta < \pi\}.$$

Diperoleh $p^{-1}(U_1) = \bigcup_{k=0}^{2n-1} V_n^k$ dengan

$$V_n^k = \{e^{i\phi} \in S^1 \mid x_k < \phi < x_k + \frac{\pi}{n}\}, x_k = \frac{k\pi}{2}, k = 0, 2, 4, ..., 2n - 2.$$

Akibatnya $p_n|_{V_n^k} : V_n^k \longrightarrow U_1$ homeomorfisma dan U_1 tertutup rata oleh p_n. Analog,

$$U_2 = \{(x, y) \in S^1 : x > 0\},$$
$$U_3 = \{(x, y) \in S^1 : x < 0\}, \text{ dan}$$
$$U_4 = \{(x, y) \in S^1 : y < 0\}$$

juga tertutup rata oleh p_n. Untuk sebarang $x \in S^1$ berlaku x anggota salah satu dari $U_i, i = 1, 2, 3, 4$. Akibatnya (S^1, p_n) ruang penutup dari S^1.

Berikut diberikan definisi pengangkatan pemetaan kontinu pada suatu ruang topologis.

Definisi 2.5 ([2]) *Diberikan ruang-ruang topologis* $X, \tilde{X}$ *dan* Y *serta pemetaan* $p : \tilde{X} \longrightarrow X$*. Misalkan* $f : Y \longrightarrow X$ *pemetaan kontinu. Pengangkatan* f *adalah pemetaan* $\tilde{f} : Y \longrightarrow \tilde{X}$ *dengan sifat* $p \circ \tilde{f} = f$*.*

Selanjutnya diberikan beberapa hasil yang sudah dibahas dalam [2] dan akan digunakan dalam pembahasan selanjutnya.

Teorema 2.6 ([2]) *Diketahui* (E, p) *ruang penutup* X*. Jika* $\alpha : I \longrightarrow X$ *merupakan lintasan dan* $e \in E$ *dengan* $p(e) = \alpha(0)$*, maka terdapat dengan tunggal lintasan* $\tilde{\alpha} : I \longrightarrow E$ *dengan* $\tilde{\alpha}(0) = e$ *sehingga* $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$*.*

Teorema 2.7 ([2]) *Misalkan* (E, p) *ruang penutup dari* X *dan* $x_0, x_1 \in X$*. Diberikan lintasan* f *dan* g *dari* x_0 *ke* x_1 *serta* $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$*. Jika* $\tilde{f}$ *dan* $\tilde{g}$ *adalah pengangkatan* f *dan* g *berturut-turut dan* $F : f \simeq_p g$ *serta* $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0 = \tilde{g}(0)$*, maka* $\tilde{F} : \tilde{f} \simeq_p \tilde{g}$ *dan* $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$*.*

Teorema 2.8 ([2]) *Diketahui* (E, p) *ruang penutup* X*,* $x_0 \in X$ *dan* $e_0 \in p^{-1}(x_0)$*. Jika* f *adalah loop dengan titik basis* x_0 *yang memiliki pengangkatan* $\tilde{f}$ *dengan* $\tilde{f}(0) = e_0$*, maka* $[f] \in p_*(\pi_1(E, e_0))$ *jika dan hanya jika* $\tilde{f}$ *loop di* E *dengan titik basis* e_0*.*

Berikut ini adalah syarat perlu dan cukup suatu pemetaan memiliki pengangkatan. Bukti diberikan untuk keperluan pembahasan selanjutnya.

Teorema 2.9 ([2]) *Diketahui* Y *ruang topologis yang terhubung dan terhubung lintasan lokal dan* $f : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ *adalah fungsi kontinu. Jika* (E, p) *ruang penutup* X *dengan* $p(\tilde{x}_0) = x_0$*, maka terdapat dengan tunggal* $\tilde{f} : (Y, y_0) \longrightarrow (E, e_0)$ *pengangkatan dari* f *jika dan hanya jika* $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$*.*

Bukti. Akan didefinisikan pemetaan $\tilde{f} : Y \longrightarrow \tilde{X}$. Misalkan $y \in Y$. Karena Y terhubung dan terhubung lintasan lokal, Y terhubung lintasan. Hal ini berarti terdapat lintasan $\alpha : I \longrightarrow Y$ dari y_0 ke y. Diperhatikan bahwa $f \circ \alpha : I \longrightarrow X$ merupakan lintasan dengan titik awal $f(u(0)) = x_0$. Berdasarkan Teorema 2.6, terdapat dengan tunggal $\tilde{\alpha} : I \longrightarrow \tilde{X}$ sehingga $p \circ \tilde{\alpha} = f \circ \alpha$ dan $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$. Didefinisikan $\tilde{f} : Y \longrightarrow \tilde{X}$ dengan $\tilde{f}(y) = \tilde{\alpha}(1)$. Selanjutnya dapat ditunjukkan $\tilde{f}$ kontinu dan merupakan pengangkatan dari f. □

3. FUNGTOR $F : Cov_X \longrightarrow SetG$

Pada bagian pertama akan dibentuk kategori dengan kelas obyek semua ruang penutup dari ruang topologis X beserta homomorfisma penutup (covering homomorphism) sebagai anggota kelas morfismanya.

Definisi 3.1 ([2]) *Misalkan* (E_1, p_1) *dan* (E_2, p_2) *merupakan ruang penutup dari* X. *Homomorfisma penutup* $f : (E_1, p_1) \longrightarrow (E_2, p_2)$ *adalah pemetaan kontinu* $f : E_1 \longrightarrow E_2$ *dengan sifat* $p_1 = p_2 \circ f$.

Lemma 3.2 *Diberikan sebarang ruang topologis* X. *Dibentuk* $obj(Cov_X)$ *yaitu kelas ruang-ruang penutup dari* X *yang terhubung lintasan dan* $Mor(Cov_X)$ *yaitu kelas homomorfisma penutup antar dua ruang penutup dari* X *dan dilengkapi operasi komposisi fungsi biasa. Akibatnya* Cov_X *merupakan kategori dengan kelas obyek adalah* $obj(Cov_X)$ *dan kelas morfisma adalah* $Mor(Cov_X)$.

Bukti. Diambil sebarang (E, p) yaitu ruang penutup X. Didefinisikan pemetaan kontinu $1_E : E \longrightarrow E$. Mengingat $p = p \circ 1_E$, disimpulkan 1_E merupakan homomorfisma penutup dan untuk sebarang $f \in Mor(X, Y)$ berlaku $1_E \circ f = f$. Diambil sebarang $(E, p), (E', p'), (E", p")$ ruang-ruang penutup X dan $f \in Mor(E, E'), g \in Mor(E', E")$. Diperoleh $p = p' \circ f = p" \circ (g \circ f)$. Akibatnya $g \circ f \in Mor(E, E")$. Jadi, $\mathcal{C}$ merupakan kategori. $\square$

Berdasarkan Teorema 2.9 diperoleh syarat perlu dan cukup eksistensi morfisma antara dua ruang penutup sebagai berikut.

Teorema 3.3 *Misalkan* $x_0 \in X$ *dan* $(E_1, p_1), (E_2, p_2) \in Cov_X$. *Jika* E_1 *dan* E_2 *keduanya terhubung lintasan lokal, maka terdapat morfisma* $f : (E_1, p_1) \longrightarrow (E_2, p_2)$ *jika dan hanya jika* $p_{1*}(\pi_1(E_1, e_1)) \subset p_{2*}(\pi_1(E_2, e_2))$ *untuk suatu* $e_1 \in p_1^{-1}(x_0)$, $e_2 \in p_2^{-1}(x_0)$.

Di pihak lain, untuk sebarang ruang topologis X dapat dibentuk kategori yang berbeda dengan pembentukan kategori Cov_X. Sebelumnya akan diberikan terlebh dahulu pengertian aksi suatu grup G pada himpunan X.

Definisi 3.4 *Diketahui* G *merupakan grup dengan identitas* e_G *dan* X *himpunan tak kosong. Aksi kanan dari* G *pada* X *adalah pemetaan* $\cdot : X \times G \longrightarrow X, \cdot(x, g) = x \cdot g$ *yang memenuhi :*

(1) $x \cdot (gh) = (x \cdot g) \cdot h$

(2) $x \cdot e_G = x$,*untuk setiap* $x \in X$ *dan* $g \in G$.

Himpunan tak kosong yang dilengkapi aksi kanan disebut $G-$*set kanan.*

Definisi 3.5 *Misalkan* F_1 *dan* F_2 *merupakan* $G-$*set kanan. Pemetaan*

$$f : F_1 \longrightarrow F_2$$

disebut $G-$*map jika* $f(xg) = f(x)g$ *untuk setiap* $x \in X$ *dan* $g \in G$.

Lemma 3.6 *Untuk sebarang grup G, $obj(SetG)$ menyatakan kelas himpunan-himpunan $G-$set kanan dan $Mor(SetG)$ merupakan kelas $G-$map antar dua $G-$set dengan komposisi fungsi biasa. Akibatnya $SetG$ merupakan kategori dengan kelas obyek $obj(SetG)$ dan kelas morfisma $Mor(SetG)$.*

Bukti. Diambil sebarang $F \in obj(SetG)$. Misalkan $i : F \longrightarrow F$ adalah pemetaan identitas. Untuk sebarang $x \in F, g \in G$ berlaku $i(xg) = xg = i(x)g$ dan $i \in Mor(F, F)$. Akibatnya i merupakan identitas obyek F. Diambil sebarang $f_1 \in Mor(F_1, F_2), f_2 \in Mor(F_2, F_3)$. Untuk sebarang $x \in F_1, g \in G$ berlaku

$$\begin{aligned}(f_2 \circ f_1)(xg) &= f_2(f_1(xg)) \\ &= f_2(f_1(x)g) \\ &= (f_2(f_1(x)))g \\ &= (f_2 \circ f_1)(x)g.\end{aligned}$$

Akibatnya $f_2 \circ f_1 \in Mor(F_1, F_3)$. Jadi, $SetG$ merupakan kategori. □

Diberikan ruang topologis X dan $x_0 \in X$. Dibentuk $G = \pi_1(X, x_0)$. Dari kedua kategori yang sudah terbentuk di atas, akan didefinisikan suatu fungtor $F : Cov_X \longrightarrow SetG$. Diambil sebarang $(E, p) \in obj(Cov_X)$, kemudian didefinisikan $F(E, p) := p^{-1}(x_0)$, untuk suatu x_0 di X. Akan ditunjukkan bahwa $F(E, p)$ berada di $SetG$. Pertama didefinisikan dahulu aksi kanan dari G pada $p^{-1}(x_0)$.

Misalkan α merupakan loop dengan titik basis x_0. Diberikan sebarang $e \in p^{-1}(x_0)$, artinya $p(e) = x_0 = \alpha(0)$. Berdasarkan Lemma 2.6, terdapat dengan tunggal lintasan $\tilde{\alpha} : I \longrightarrow E$ dengan $\tilde{\alpha}(0) = e$ sehingga $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. Diperoleh $p(\tilde{\alpha}(1)) = \alpha(1) = x_0$ dan $\tilde{\alpha}(1) \in p^{-1}(x_0)$.

Lemma 3.7 *Dengan menggunakan notasi yang sudah disebutkan sebelumnya, pengaitan $\cdot : p^{-1}(x_0) \times G \longrightarrow p^{-1}(x_0)$, dengan definisi $e \cdot [\alpha] := \tilde{\alpha}(1)$ dengan $\tilde{\alpha}$ adalah pengangkatan α yang memiliki titik awal e, merupakan aksi kanan.*

Bukti. (1) Akan ditunjukkan $\cdot$ terdefinisi dengan baik. Diambil sebarang $e, e' \in p^{-1}(x_0)$ dan $[\alpha], [\beta] \in G$ dengan $e = e'$ dan $[\alpha] = [\beta] \Leftrightarrow \alpha \simeq_p \beta$. Akan ditunjukkan bahwa $e \cdot [\alpha] = e \cdot [\beta]$. Misalkan $\tilde{\alpha}$ dan $\tilde{\beta}$ merupakan pengangkatan α dan β berturut-turut dengan titik awal e. Menurut Teorema 2.7 diperoleh $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ dan $e \cdot [\alpha] = e \cdot [\beta]$. Akibatnya $\cdot$ terdefinisi dengan baik.

(2) Diambil sebarang $e \in p^{-1}(x_0)$ dan $[\alpha], [\beta] \in G$. Akan ditunjukkan bahwa $e \cdot ([\alpha] \circ [\beta]) = (e \cdot [\alpha]) \cdot [\beta]$. Diperhatikan bahwa $e \cdot ([\alpha] \circ [\beta]) = e \cdot [a \star b] = \tilde{d}(1)$ dengan $\tilde{d}$ merupakan pengangkatan dari $a \star b$ dengan titik awal e.

Selanjutnya diperoleh juga

$$\begin{aligned}(e \cdot [\alpha]) \cdot [\beta] &= \tilde{a}(1) \cdot [\beta] \\ &= u \cdot [b] \qquad\qquad (u = \tilde{a}(1)) \\ &= \tilde{b}(1)\end{aligned}$$

dengan $\tilde{a}, \tilde{b}$ masing-masing pengangkatan dari a dan b secara berturut-turut dengan $\tilde{a}(0) = e$ dan $\tilde{b}(0) = \tilde{a}(1)$. Lebih lanjut $\tilde{a} \star \tilde{b}$ terdefinisi dengan titik awal e. Selanjutnya didapat $p \circ \tilde{d} = a \star b = (p \circ \tilde{a}) \star (p \circ \tilde{b}) = p \circ (\tilde{a} \star \tilde{b})$. Akibatnya $\tilde{d}$ dan $\tilde{a} \star \tilde{b}$ merupakan pengangkatan dari $a \star b$ yang memiliki titik awal e. Berdasarkan Teorema 2.7, $\tilde{d}(1) = (\tilde{a} \star \tilde{b})(1) = \tilde{b}(1)$. Jadi, $e \cdot ([\alpha] \circ [\beta]) = (e \cdot [\alpha]) \cdot [\beta]$.

(3) Diambil sebarang $e \in p^{-1}(x_0)$. Misalkan $[c]$ elemen identitas G. Akan ditunjukkan bahwa $e \cdot [c] = e$. Misalkan $\tilde{c}$ adalah pengangkatan dari c dengan $\tilde{c}(0) = e$. Diperhatikan bahwa $[c] \in p_*(\pi_1(E, e))$. Menurut Teorema 2.8, $\tilde{c}$ merupakan loop dengan titik basis e. Akibatnya $e \cdot [c] = \tilde{c}(1) = e$. Jadi, $\cdot$ merupakan aksi kanan. □

Dengan demikian terbukti bahwa $F(E,p) := p^{-1}(x_0)$ merupakan obyek di $SetG$.

Selanjutnya diperhatikan morfisma $f : (E_1, p_1) \longrightarrow (E_2, p_2)$ di Cov_X, artinya f merupakan homomorfisma penutup dan $p_1 = p_2 \circ f$. Untuk setiap $e \in p_1^{-1}(x_0)$ berlaku $p_2(f(e)) = p_1(e) = x_0$ dan $f(e) \in p_2^{-1}(x_0)$. Akibatnya f memetakan $p_1^{-1}(x_0)$ ke $p_2^{-1}(x_0)$. Didefinisikan $F(f) = f|_{p_1^{-1}(x_0)}$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $f|_{p_1^{-1}(x_0)}$ merupakan $G-$map.

Diambil sebarang $e \in p_1^{-1}(x_0)$ dan $[\alpha] \in G$. Akan ditunjukkan $f(e \cdot [\alpha]) = f(e) \cdot [\alpha]$. Berdasarkan Teorema 2.6 terdapat dengan tunggal $\tilde{\alpha}_1$ dan $\tilde{\alpha}_2$ pengangkatan dari α dengan $\tilde{\alpha}_1(0) = e$ dan $\tilde{\alpha}_2(0) = f(e)$. Karena f homomorfisma penutup, maka $p_2 \circ f \circ \tilde{\alpha}_1 = p_1 \circ \tilde{\alpha}_1$. Akibatnya $p_2 \circ (f \circ \tilde{\alpha}_1) = \alpha = p_2 \circ \tilde{\alpha}_2$ dan $f \circ \tilde{\alpha}_1$ dan α_2 pengangkatan dari α dengan $(f \circ \tilde{\alpha_1})(0) = f(e) = \tilde{\alpha}_2(0)$. Diperoleh $f \circ \tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2$ dan

$$f(e \cdot [\alpha]) = (f \circ \tilde{\alpha}_1)(1) = \alpha_2(1) = f(e) \cdot [\alpha].$$

Jadi, $F(f)$ merupakan $G-$map.

Lemma 3.8 *Pemasangan $F : Cov_X \longrightarrow SetG$ merupakan fungtor kovarian.*

Bukti. Diambil sebarang $(E,p) \in obj(Cov_X)$. Misalkan id adalah identitas dari (E,p) dan $F(id) = id|_{p^{-1}(x_0)}$. Untuk sebarang $e \in p^{-1}(x_0)$ berlaku $id|_{p^{-1}(x_0)}(e) = id(e) = e$. Akibatnya $F(id)$ identitas dari $F(E,p) = p^{-1}(x_0)$. Diambil sebarang morfisma $f : (E_1, p_1) \longrightarrow (E_2, p_2)$ dan $g : (E_2, p_2) \longrightarrow (E_3, p_3)$. Akan ditunjukkan bahwa $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$. Diperhatikan bahwa $F(g \circ f) = (g \circ f)|_{p_1^{-1}(x_0)}$,

$F(f) = f|_{p^{-1}(x_0)}$ dan $F(g) = g|_{p_2^{-1}(x_0)}$. Untuk sebarang $e \in p_1^{-1}(x_0)$ diperoleh
$(g \circ f)|_{p_1^{-1}(x_0)}(e) = (g \circ f)(e) = g(f(e)) = g((f|_{p_1^{-1}(x_0)})(e)) = (g|_{p_2^{-1}(x_0)} \circ f|_{p^{-1}(x_0)})(e)$.
Akibatnya $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$. Jadi, F fungtor kovarian. $\square$

Kemudian akan ditunjukkan bahwa fungtor kovarian F mempunyai sifat khusus yaitu *fully faithful* jika ruang topologis X bersifat khusus pula, dalam hal ini bersifat terhubung lintasan dan terhubung lintasan lokal.

Teorema 3.9 *Jika ruang topologis X terhubung lintasan, maka fungtor*

$$F : Cov_X \longrightarrow SetG$$

bersifat faithful.

Bukti. Diambil sebarang morfisma $f, g : (E, p) \longrightarrow (E', p')$ dengan $F(f) = F(g)$, yaitu $f|_{p^{-1}(x_0)} = g|_{p^{-1}(x_0)}$. Hal ini berarti $f(y) = g(y)$ untuk setiap $y \in p^{-1}(x_0)$. Akan ditunjukkan bahwa $f(e) = g(e)$ untuk sebarang $e \in E$. Karena X terhubung lintasan, maka terdapat lintasan α dari $p(e)$ ke x_0. Berdasarkan Teorema 2.6 terdapat dengan tunggal lintasan $\tilde{\alpha}$ yang merupakan pengangkatan dari α dengan $\tilde{\alpha}(0) = e$. Misalkan α^{-1} lintasan invers dari α. Diperhatikan bahwa $f \circ \tilde{\alpha}$ lintasan dari $f(e)$ ke $f(\tilde{\alpha}(1))$ dan $g \circ \tilde{\alpha}$ lintasan dari $g(e)$ ke $g(\tilde{\alpha}(1))$. Diambil sebarang $t \in I$. Diperoleh

$$\begin{aligned}(p' \circ (f \circ \tilde{\alpha})^{-1})(t) &= p' \circ (f \circ \tilde{\alpha}(1-t)) \\ &= p(\tilde{\alpha}(1-t)) \\ &= \alpha(1-t) \\ &= \alpha^{-1}(t).\end{aligned}$$

Secara analog diperoleh $(p' \circ (g \circ \tilde{\alpha})^{-1})(t) = \alpha^{-1}(t)$. Akibatnya $(f \circ \tilde{\alpha})^{-1}$ dan $(g \circ \tilde{\alpha})^{-1}$ dua pengangkatan dari α^{-1} yang memiliki titik awal $f(\tilde{\alpha}(1))$ dan $g(\tilde{\alpha}(1))$. Karena $p(\tilde{\alpha}(1)) = \alpha(1) = x_0$, $\tilde{\alpha}(1) \in p^{-1}(x_0)$ dan berlaku

$$(f \circ \tilde{\alpha})^{-1}(0) = (f \circ \tilde{\alpha})(1) = f(\tilde{\alpha}(1)) = g(\tilde{\alpha}(1)) = (g \circ \tilde{\alpha})(1) = (g \circ \tilde{\alpha})^{-1}(0).$$

Berdasarkan Teorema 2.6 diperoleh $(f \circ \tilde{\alpha})^{-1} = (g \circ \tilde{\alpha})^{-1}$ dan

$$\begin{aligned}f(e) &= (f \circ \tilde{\alpha})(0) \\ &= (f \circ \tilde{\alpha})^{-1}(1) \\ &= (g \circ \tilde{\alpha})^{-1}(1) \\ &= (g \circ \tilde{\alpha})(0) \\ &= g(e).\end{aligned}$$

Akibatnya $f = g$. Jadi terbukti F *faithful*. $\square$

Fakta bahwa fungtor F *faithful* jika X terhubung lintasan mengakibatkan pemetaan

$$T_{(E_1,p_1),(E_2,p_2)} : Mor((E_1,p_1),(E_2,p_2)) \longrightarrow Mor(p_1^{-1}(x_0), p_2^{-1}(x_0))$$

bersifat injektif untuk setiap (E_1,p_1) dan (E_2,p_2).

Teorema 3.10 *Jika ruang topologis X bersifat terhubung lintasan lokal, maka fungtor $F : Cov_X \longrightarrow SetG$ bersifat full.*

Bukti. Misalkan $x_0 \in X$. Diambil sebarang $(E,p),(E',q) \in Cov_X$. Diberikan pemetaan $f : p^{-1}(x_0) \longrightarrow q^{-1}(x_0)$ yang merupakan $G-$map. Akan ditunjukkan terdapat pemetaan kontinu $g : E \longrightarrow E'$ sehingga $p = q \circ g$ dan $F(g) = f$. Mengingat f merupakan $G-$map, untuk setiap $[\alpha] \in G$ dan $e \in p^{-1}(x_0)$ berlaku

$$f(e[\alpha]) = f(e)[\alpha] \Leftrightarrow f(\tilde{\alpha}_e(1)) = \tilde{\alpha}_{f(e)}(1)$$

dimana $\tilde{\alpha}_e$ dan $\tilde{\alpha}_{f(e)}$ secara berturut-turut merupakan pengangkatan dari α dengan titik awal e dan $f(e)$. Diberikan sebarang $e_0 \in p^{-1}(x_0)$. Namakan $e_0' = f(e_0)$. Diambil sebarang $[\beta] \in \pi_1(E,e_0)$. Akan ditunjukkan bahwa $p_*([\beta]) \in q_*(\pi_1(E',e_0'))$. Karena β loop dengan titik basis e_0, maka $p \circ \beta$ merupakan loop dengan titik basis x_0. Karena p pemetaan penutup dari X, maka β merupakan pengangkatan dari $p \circ \beta$. Mengingat f merupakan $G-$map, diperoleh

$$f(e_0[p\circ\beta]) = f(e_0)[p\circ\beta] \Leftrightarrow e_0' = f(e_0) = f(\beta(1)) = \delta(1),$$

dimana $\delta : I \longrightarrow E'$ pengangkatan $p \circ \beta$ dengan titik awal $f(e_0) = e_0'$. Akibatnya pengangkatan $p\circ\beta$ merupakan loop dengan titik basis e_0'. Hal ini berarti $p_*([\beta]) \in q_*(\pi_1(E',e_0'))$ menurut Teorema 2.8. Berdasarkan Teorema 2.9, terdapat pemetaan kontinu $\tilde{p} : E \longrightarrow E'$ dengan sifat $p = q\circ\tilde{p}$. Tinggal ditunjukkan bahwa $\tilde{p}(e) = f(e)$ untuk setiap $e \in p^{-1}(x_0)$. Diberikan sebarang $e \in p^{-1}(x_0)$. Karena E terhubung lintasan, maka terdapat lintasan γ dari e_0 ke e. Didefinisikan $\alpha = p \circ \gamma$ yang merupakan loop di X dengan titik basis x_0. Diperhatikan bahwa γ merupakan pengangkatan dari α dengan titik awal e_0. Misalkan $\tilde{\alpha}_{e_0'}$ pengangkatan α dengan titik awal e_0' dan $\tilde{\alpha}_{f(e_0)}$ pengangkatan α dengan titik awal $f(e_0)$. Mengingat f adalah $G-$map, maka

$$\begin{aligned} f(e) &= f(\tilde{\alpha}_{e_0}(1)) \\ &= \tilde{\alpha}_{f(e_0)}(1) \\ &= \tilde{\alpha}_{e_0'}(1) \\ &= \tilde{p}(e) \quad \text{sesuai definisi } \tilde{p} \end{aligned}$$

Akibatnya fungtor F full. □

Secara mudah dapat disimpulkan akibat berikut.

Akibat 3.11 *Jika ruang topologis X terhubung lintasan dan terhubung lintasan lokal, maka fungtor $F : Cov_X \longrightarrow SetG$ bersifat fully faithful.*

Fakta bahwa fungtor F *fully faithful* jika X terhubung lintasan dan terhubung lintasan lokal mengakibatkan pemetaan

$$T_{(E_1,p_1),(E_2,p_2)} : Mor((E_1,p_1),(E_2,p_2)) \longrightarrow Mor(p_1^{-1}(x_0), p_2^{-1}(x_0))$$

bersifat bijektif untuk setiap (E_1,p_1) dan (E_2,p_2).

Contoh 3.12 *Perhatikan ruang topologis* $X = S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ *dan diambil* $x_0 = (1,0)$. *Berdasarkan hasil di* [2] *diperoleh* $G = \pi_1(X,x_0) \cong (\mathbb{Z},+)$. *Selanjutnya perhatikan ruang penutup* (S^1,p_2) *dari* S^1 *dan diperoleh* $p_2^{-1}(x_0) = \{1,-1\}$. *Didefinisikan* $\cdot : p^{-1}(x_0) \times G \longrightarrow p^{-1}(x_0)$ *dengan* $e \cdot [\alpha] := \tilde{\alpha}_e(1)$. *Akibatnya diperoleh*

$$\begin{aligned} 1 \cdot [f_{2k}] &= 1, 1 \cdot [f_{2k+1}] = -1 \\ -1 \cdot [f_{2k}] &= -1, -1 \cdot [f_{2k+1}] = 1. \end{aligned}$$

Diperhatikan pemetaan bijektif $h_1, h_2 : p^{-1}(x_0) \longrightarrow p^{-1}(x_0)$ *dengan* $h_1 = id$ *dan* $h_2(1) = -1$, $h_2(-1) = 1$. *Jelas* h_1 *merupakan* $G-$*map. Adapun* h_2 *merupakan* $G-$*map karena*

$$\begin{aligned} h_2(1 \cdot [f_{2k}]) &= h_2(1) = -1 = -1 \cdot [f_{2k}] = h_2(1) \cdot [f_{2k}] \\ h_2(-1 \cdot [f_{2k}]) &= h_2(-1) = 1 = 1 \cdot [f_{2k}] = h_2(-1) \cdot [f_{2k}] \\ h_2(1 \cdot [f_{2k+1}]) &= h_2(-1) = 1 = -1 \cdot [f_{2k+1}] = h_2(1) \cdot [f_{2k+1}] \\ h_2(-1 \cdot [f_{2k+1}]) &= h_2(1) = -1 = 1 \cdot [f_{2k+1}] = h_2(-1) \cdot [f_{2k+1}]. \end{aligned}$$

Akibatnya semua pemetaan bijektif dari $p^{-1}(x_0)$ *ke* $p^{-1}(x_0)$ *merupakan* $G-$*map. Dengan demikian ada 2 buah isomorfisma dari* (S^1,p_2) *ke dirinya sendiri.*

Contoh 3.13 *Perhatikan ruang topologis* $X = S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ *dan diambil* $x_0 = (1,0)$. *Berdasarkan hasil di* [2] *diperoleh* $G = \pi_1(X,x_0) \cong (\mathbb{Z},+)$. *Selanjutnya perhatikan ruang penutup* S^1 *yaitu* (S^1,p_3) *dan diperoleh* $p_3^{-1}(x_0) = \{1, e^{i2\pi/3}, e^{i4\pi/3}\}$. *Didefinisikan* $\cdot : p^{-1}(x_0) \times G \longrightarrow p^{-1}(x_0)$ *dengan* $e \cdot [\alpha] := \tilde{\alpha}_e(1)$. *Namakan* $a_1 = 1, a_2 = e^{i2\pi/3}, a_3 = e^{i4\pi/3}$. *Selanjutnya didapat*

$$\begin{aligned} a_i \cdot [f_{3k}] &= a_i, \forall i = 1,2,3 \\ a_1 \cdot [f_{3k+1}] &= a_2, a_1 \cdot [f_{3k+2}] = a_3 \\ a_2 \cdot [f_{3k+1}] &= a_3, a_2 \cdot [f_{3k+2}] = a_1 \\ a_3 \cdot [f_{3k+1}] &= a_1, a_3 \cdot [f_{3k+2}] = a_2. \end{aligned}$$

Diperhatikan bahwa terdapat 6 *pemetaan bijektif dari* $p^{-1}(x_0)$ *ke* $p^{-1}(x_0)$ *yaitu:*

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= id_{p^{-1}(x_0)} \\ \sigma_2 &= (a_1)(a_2 \quad a_3) \\ \sigma_3 &= (a_2)(a_1 \quad a_3) \\ \sigma_4 &= (a_3)(a_1 \quad a_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_5 &= (a_1 \quad a_3 \quad a_2)\\ \sigma_6 &= (a_1 \quad a_2 \quad a_3).\end{aligned}$$

Jelas bahwa $id_{p^{-1}(x_0)}$ merupakan $G-$map. Selanjutnya karena dipenuhi

$$\begin{aligned}\sigma_2(a_3\cdot[f_1]) &= \sigma_2(a_1)=a_1\neq a_3=a_2\cdot[f_1]=\sigma_2(a_3)\cdot[f_1]\\ \sigma_3(a_2\cdot[f_1]) &= \sigma_3(a_3)=a_1\neq a_3=a_2\cdot[f_1]=\sigma_3(a_2)\cdot[f_1]\\ \sigma_4(a_3\cdot[f_1]) &= \sigma_4(a_1)=a_2\neq a_1=a_3\cdot[f_1]=\sigma_4(a_3)\cdot[f_1],\end{aligned}$$

disimpulkan bahwa $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ bukan $G-$map.

Pemetaan σ_5 merupakan $G-$map karena

$$\begin{aligned}\sigma_5(a_i\cdot[f_{3k}]) &= \sigma_5(a_i)=\sigma_5(a_i)\cdot[f_{3k}], \forall i=1,2,3\\ \sigma_5(a_1\cdot[f_{3k+1}]) &= \sigma_5(a_2)=a_1=a_3\cdot[f_{3k+1}]=\sigma_5(a_1)\cdot[f_{3k+1}]\\ \sigma_5(a_2\cdot[f_{3k+1}]) &= \sigma_5(a_3)=a_2=a_1\cdot[f_{3k+1}]=\sigma_5(a_2)\cdot[f_{3k+1}]\\ \sigma_5(a_3\cdot[f_{3k+1}]) &= \sigma_5(a_1)=a_3=a_2\cdot[f_{3k+1}]=\sigma_5(a_3)\cdot[f_{3k+1}]\\ \sigma_5(a_1\cdot[f_{3k+2}]) &= \sigma_5(a_3)=a_2=a_3\cdot[f_{3k+2}]=\sigma_5(a_1)\cdot[f_{3k+2}]\\ \sigma_5(a_2\cdot[f_{3k+2}]) &= \sigma_5(a_1)=a_3=a_1\cdot[f_{3k+2}]=\sigma_5(a_2)\cdot[f_{3k+2}]\\ \sigma_5(a_3\cdot[f_{3k+2}]) &= \sigma_5(a_2)=a_1=a_2\cdot[f_{3k+2}]=\sigma_5(a_3)\cdot[f_{3k+2}].\end{aligned}$$

Pemetaan σ_6 merupakan $G-$map karena

$$\begin{aligned}\sigma_6(a_i\cdot[f_{3k}]) &= \sigma_6(a_i)=\sigma_6(a_i)\cdot[f_{3k}], \forall i=1,2,3\\ \sigma_6(a_1\cdot[f_{3k+1}]) &= \sigma_6(a_2)=a_3=a_2\cdot[f_{3k+1}]=\sigma_6(a_1)\cdot[f_{3k+1}]\\ \sigma_6(a_2\cdot[f_{3k+1}]) &= \sigma_6(a_3)=a_1=a_3\cdot[f_{3k+1}]=\sigma_6(a_2)\cdot[f_{3k+1}]\\ \sigma_6(a_3\cdot[f_{3k+1}]) &= \sigma_6(a_1)=a_2=a_1\cdot[f_{3k+1}]=\sigma_6(a_3)\cdot[f_{3k+1}]\\ \sigma_6(a_1\cdot[f_{3k+2}]) &= \sigma_6(a_3)=a_1=a_2\cdot[f_{3k+2}]=\sigma_6(a_1)\cdot[f_{3k+2}]\\ \sigma_6(a_2\cdot[f_{3k+2}]) &= \sigma_6(a_1)=a_2=a_3\cdot[f_{3k+2}]=\sigma_6(a_2)\cdot[f_{3k+2}]\\ \sigma_6(a_3\cdot[f_{3k+2}]) &= \sigma_6(a_2)=a_3=a_1\cdot[f_{3k+2}]=\sigma_6(a_3)\cdot[f_{3k+2}].\end{aligned}$$

Akibatnya pemetaan bijektif dari $p^{-1}(x_0)$ ke $p^{-1}(x_0)$ yang merupakan $G-$map adalah σ_1, σ_5 dan σ_6. Dengan demikian ada 3 buah isomorfisma dari (S^1, p_3) ke dirinya sendiri.

Catatan 3.14 Ruang penutup (E_1, p_1) ekuivalen dengan (E_2, p_2) jika dan hanya jika $p_1^{-1}(x_0)$ dan $p_2^{-1}(x_0)$ isomorfis. Dengan demikian, jika $\mid p_1^{-1}(x_0) \mid \neq \mid p_2^{-1}(x_0) \mid$, maka (E_1, p_1) tidak ekuivalen dengan (E_2, p_2). Artinya untuk melihat bahwa dua ruang penutup (E_1, p_1) dan (E_2, p_2) tidak ekuivalen cukup dengan melihat kardinalitas $p_1^{-1}(x_0)$ dan $p_2^{-1}(x_0)$. Sebagai contoh (S^1, p_n) dan (S^1, p_m) tidak ekuivalen karena $\mid p_n^{-1}(1,0) \mid = n \neq m = \mid p_m^{-1}(1,0) \mid$.

Catatan 3.15 Untuk menentukan semua morfisma dari (E_1, p_1) ke (E_2, p_2) dapat dilakukan dengan menentukan semua morfisma dari $p_1^{-1}(x_0)$ ke $p_2^{-1}(x_0)$. Misalkan $(\tilde{X}, p)$ ruang penutup X. Notasi $Cov(\tilde{X}/X)_p$ menyatakan himpunan semua isomorfisma dari $(\tilde{X}, p)$ ke dirinya sendiri yang merupakan grup terhadap operasi komposisi fungsi. Karena F *fully faithful*, berakibat F merefleksikan isomorfisma. Sehingga disimpulkan anggota $(\tilde{X}, p)$ dapat ditentukan dengan mencari semua isomorfisma dari $p^{-1}(x_0)$ ke dirinya sendiri. Pada contoh 3.12 dan 3.13 diperoleh anggota $Cov(S^1/S^1)_{p_2}$ adalah identitas dan rotasi sebesar 180 derajat sedangkan anggota $Cov(S^1/S^1)_{p_3}$ adalah identitas, rotasi 120 derajat dan 240 derajat.

Catatan 3.16 Misalkan $(\tilde{X}, p)$ ruang penutup X dengan $p(\tilde{x}_0) = x_0$. $Cov(\tilde{X}/X)_p$ dapat digunakan untuk menentukan apakah $p_*(\pi_1(\tilde{X}_0, \tilde{x}_0))$ subgrup normal dari $\pi_1(X, x_0)$ atau tidak, dengan terlebih dahulu mendefinisikan aksi kanan dari $Cov(\tilde{X}/X)_p$ pada $p^{-1}(x_0)$ dengan $y \cdot \sigma = \sigma(y)$ (lihat Teorema 10.18, [3]).

4. PENUTUP

Dari penjelasan sebelumnya diperoleh kesimpulan bahwa menentukan semua morfisma antara (E_1, p_1) dan (E_2, p_2) dapat dilakukan dengan menentukan semua morfisma antara $p_1^{-1}(x_0)$ dan $p_2^{-1}(x_0)$ dengan syarat X terhubung lintasan dan terhubung lintasan lokal.

REFERENSI

[1] Brazas, J., Generalized Covering Spaces Theories, *Theory and Applications of Categories*, Vol 30 no 35 (2015), 1132-1162.
[2] Munkres, J.R., 2000, *Topology Second Edition*, Prentice-Hall, USA.
[3] Rotman, J.J., 1988, *An Introduction to Algebraic Topology*, Springer, New York.
[4] Adhikari, M.R., 2016, *Basic Algebraic Topology and its Application*, Springer, India.
[5] Weimar, J., 2008, Categories of Sets with A Group Action, *Thesis*, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden, Leiden.
[6] Wisbauer, R., 1991, *Foundations of Module and Ring Theory: A Handbook for Study and Research*, Gordon and Breach Science Publihsers, Reading.

Valentino Risali* (Penulis Korespondensi)
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia
risaliv@gmail.com

Indah Emilia Wijayanti
Departemen Matematika Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia
ind_wijayanti@ugm.ac.id