Jurnal Matematika Thales (JMT): 2022 ISSN: 2715-1891
Vol. 04 No. 02

SOLUSI KUAT INTERVAL DARI SISTEM INTERVAL PERSAMAAN LINEAR MAX-PLUS (INTERVAL STRONG SOLUTIONS OF INTERVAL SYSTEMS OF MAX-PLUS LINEAR EQUATIONS)

FATHIN AZKIYA*, ARI SUPARWANTO

Abstract. Let $\mathbb{R}$ be the set of all real numbers and $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ whose $\varepsilon = \{-\infty\}$. Max-plus algebra is the set $\mathbb{R}_\varepsilon$ that is equipped two operations maximum and addition. Max-plus algebra can be expanded to interval max-plus algebra, it is the set of closed intervals in $\mathbb{R}_\varepsilon$ that is equipped with the operation maximum as $\bar{\oplus}$ and the operation addition as $\bar{\otimes}$. This study aims to discuss the existence and uniqueness of interval strong solutions of interval systems of interval max-plus linear equations. The proof of the existence of interval strong solutions is constructive and generates a formula for computing such solutions. A necessary and sufficient condition for the uniqueness of interval strong solutions is obtained by testing the uniqueness of the solution of a finite number of subsystems from all of its subsystems. From these conditions, an algorithm can be obtained that can verify the uniqueness of interval strong solutions of interval systems of max-plus linear equation.
Keywords: Max-plus linear equation, interval system, strong solvable, interval strong solution.

Abstrak. Abstrak. Misalkan $\mathbb{R}$ adalah himpunan semua bilangan real dan $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\varepsilon = \{-\infty\}$. Aljabar maks-plus adalah himpunan $\mathbb{R}_\varepsilon$ yang dilengkapi dua operasi maksimum dan penjumlahan. Aljabar max-plus dapat diperluas menjadi aljabar max-plus interval, yaitu himpunan yang anggotanya merupakan interval-interval tertutup dalam $\mathbb{R}_\varepsilon$ yang dilengkapi dengan operasi maksimum $\bar{\oplus}$ dan operasi penjumlahan $\bar{\otimes}$. Penelitian ini bertujuan untuk membahas eksistensi dan ketunggalan dari solusi kuat interval dari sistem interval persamaan linear dalam aljabar max-plus interval. Pembuktian dari eksistensi solusi kuat interval bersifat konstruktif dan menghasilkan rumus untuk menghitung solusi tersebut. Syarat perlu dan cukup dari ketunggalan solusi kuat interval diperoleh dengan menguji ketunggalan penyelesaian dari sejumlah subsistem terbatas dari semua subsistemnya. Dari syarat tersebut diperoleh algoritma yang dapat memverifikasi ketunggalan solusi kuat interval dari sistem interval persamaan linear max-plus.
Kata-kata kunci: persamaan linear max-plus, sistem interval, strong solvable, solusi kuat interval.

1. PENDAHULUAN

Pada masalah pemodelan dan analisa suatu jaringan, terkadang waktu aktifitasnya tidak diketahui dengan pasti. Hal ini terjadi disebabkan jaringan masih pada tahap perancangan atau data-data mengenai waktu aktifitas belum diketahui secara pasti. Ketidakpastian waktu aktifitas jaringan ini dapat dimodelkan dalam suatu interval tertutup dalam aljabar max-plus, yang selanjutnya disebut waktu aktifitas interval.

Aljabar max-plus dapat digunakan untuk memodelkan dan menganalisis secara aljabar masalah-masalah jaringan, seperti penjadwal penerbangan pesawat di suatu bandara, penjadwalan jaringan kereta dan kestabilan, lebih detailnya dapat dilihat pada [1] dan [4]. Pemodelan jaringan dengan pendekatan aljabar max-plus biasanya merupakan sistem persamaan linear max plus dan dapat dituliskan sebagai persamaan matriks $A \otimes x = b$ dengan x dan b masing-masing adalah vektor input dan vektor output.

Konsep aljabar max-plus interval merupakan perluasan konsep aljabar max-plus. Konsep tersebut digunakan untuk menganalisis masalah pemodelan dengan waktu aktifitas interval, dengan elemen-elemennya berupa interval tertutup dalam aljabar maxplus yang dilengkapi dengan operasi $\bar{\oplus}$ dan operasi $\bar{\otimes}$. Sistem interval persamaan linear maxplus dituliskan sebagai persamaan $\boldsymbol{A}\bar{\otimes}x = \boldsymbol{b}$ dengan $\boldsymbol{A}, x$, dan $\boldsymbol{b}$ masing-masing adalah matriks interval, vektor input dan vektor interval output, lebih detailnya dapat dilihat pada [2].

Terdapat beberapa tipe penyelesaian dari sistem interval $\boldsymbol{A}\bar{\otimes}x = \boldsymbol{b}$. Salah satunya dijelaskan dalam [2] yaitu tipe penyelesaian sistem interval yang strongly solvable. Sejalan dengan penelitian tersebut, pada tulisan ini akan dibahas mengenai konsep solusi kuat interval yang dapat menjadi penyelesaian terbatas berbentuk interval dari sistem interval yang strongly solvable sebagaimana yang terdapat pada [5]. Pada penelitian ini, akan ditentukan syarat perlu dan cukup dari eksistensi dari solusi kuat interval dari sistem interval $\boldsymbol{A}\bar{\otimes}x = \boldsymbol{b}$ dan memberikan rumus untuk menghitung solusi tersebut.

Selain itu juga diberikan pembahasan mengenai pelemahan syarat perlu dari ketunggalan solusi kuat interval $\boldsymbol{A}\bar{\otimes}x = \boldsymbol{b}$ serta mengembangkan algoritma untuk memeriksa ketunggalannya.

2. ALJABAR MAX-PLUS

Pada bagian ini dibahas konsep dasar aljabar max-plus dan sistem persamaan linear max-plus $A \otimes x = b$. Pembahasan selengkapnya dapat dilihat pada [1],[4],[5] dan [7].

2.1. Operasi Dasar atas Aljabar Max-Plus.

Diberikan $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ himpunan semua bilangan real dan $\varepsilon = \{-\infty\}$. Pada $\mathbb{R}_\varepsilon$ didefinisikan operasi berikut: untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon$,

$$a \oplus b = \max\{a, b\} \text{ dan } a \otimes b = a + b$$

Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semifield komutatif idempoten dengan elemen netral $\varepsilon = -\infty$ dan elemen satuan $e = 0$. Kemudian $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ disebut aljabar max-plus, yang selanjutnya cukup dituliskan dengan $\mathbb{R}_{\max}$. Relasi $\leq$ pada $\mathbb{R}_{\max}$ didefinisikan dengan $x \leq y \Leftrightarrow x \oplus y = y$ merupakan urutan parsial pada $\mathbb{R}_{\max}$.

2.2. **Operasi Aljabar Matriks atas Aljabar Max-Plus.**

Didefinisikan $\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ sebagai himpunan semua matriks berukuran $m \times n$ yang entrientrinya di dalam $\mathbb{R}_{\max}$. Untuk $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \neq 0$, didefinisikan $\bar{n} := \{1, 2, \ldots, n\}$. Entri matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ baris ke- i kolom ke- j dinotasikan dengan a_{ij} atau $[A]_{ij}$ untuk setiap $i \in \bar{m}$ dan $j \in \bar{n}$.

Definisi 2.1. [4]

(1) *Untuk* $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ *didefinisikan* $A \oplus B \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ *dengan*

$$[A \oplus B]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \max\{a_{ij}, b_{ij}\}$$

untuk setiap $i \in \bar{m}$ *dan* $j \in \bar{n}$.

(2) *Untuk* $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times p}, B \in \mathbb{R}_{\max}^{p\times n}$ *didefinisikan* $A \otimes B \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ *dengan*

$$[A \otimes B]_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{p} a_{ik} \otimes b_{kj} = \max_{k\in\bar{p}}\{a_{ik} + b_{kj}\}$$

untuk setiap $i \in \bar{m}$ *dan* $j \in \bar{n}$.

(3) *Untuk* $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}$ *dan* $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ *didefinisikan* $\alpha \otimes A$ *dengan*

$$[\alpha \otimes A]_{ij} = \alpha \otimes a_{ij}$$

untuk setiap $i \in \bar{m}$ *dan* $j \in \bar{n}$.

(4) *Matriks nol atas* $\mathbb{R}_{\max}$ *dinotasikan dengan* $\mathcal{E} \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ *didefinisikan sebagai matriks dengan* $[\mathcal{E}]_{ij} = \varepsilon$, *untuk setiap* $i \in \bar{m}$ *dan* $j \in \bar{n}$ *sedemikian sehingga untuk setiap* $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ *memenuhi* $A \oplus \mathcal{E} = A = \mathcal{E} \oplus A$.

(5) *Matriks identitas dalam aljabar max-plus dituliskan dengan* $E \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ *adalah matriks dengan*

$$[E]_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ \varepsilon, & i \neq j \end{cases}$$

untuk setiap $i, j \in \bar{n}$. *Lebih lanjut, untuk setiap matriks* $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ *memenuhi* $A \otimes E = A = E \otimes A$.

Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}, \oplus, \otimes)$ merupakan semifield komutatif idempoten. Relasi $\leq$ yang didefinisikan pada $\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ dengan

$$A \leq B \Leftrightarrow A \oplus B = B \Leftrightarrow a_{ij} \oplus b_{ij} = b_{ij} \Leftrightarrow a_{ij} \leq b_{ij}, \forall i \in \bar{m} \text{ dan } j \in \bar{n}$$

merupakan urutan parsial pada $\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$.

2.3. **Sistem Persamaan Linear Max-Plus.**

Diberikan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ dan $x, b \in \mathbb{R}_{\max}^{n}$. Penyelesain sistem $A \otimes x = b$ adalah himpunan semua vektor $x \in \mathbb{R}_{\max}^{n}$ sedemikian hingga $A \otimes x = b$.

Definisi 2.2. [1] *Vektor* $\grave{x} \in \mathbb{R}_{\max}^{n}$ *disebut subpenyelesaian dari sistem* $A \otimes x = b$ *jika memenuhi pertidaksamaan* $A \otimes \grave{x} \leq b$.

Lemma 2.3. [5] *Diberikan sistem $A \otimes x = b$. Jika*

$$x_j^*(A,b) = \min_{1\le k\le n} \{b_k - a_{kj}\}, j \in \bar{n}, \tag{2.1}$$

maka $x^*(A,b) = \left(x_j^*(A,b)\right) \in \mathbb{R}^n_{\max}$ merupakan subpenyelesaian terbesar dari sistem $A \otimes x = b$.

Lemma 2.4. [5] *Sistem $A \otimes x = b$ memiliki penyelesaian jika dan hanya jika subpenyelesaian terbesar $x^*(A,b)$ merupakan penyelesaiannya.*

Selanjutnya, diberikan definisi solvable entry yang didapatkan dari konsep subpenyelesaian terbesar.

Definisi 2.5. [5] *Entri a_{ij} dari A disebut solvable entry dari sistem $A \otimes x = b$ jika*

$$\min_{1\le k\le n} \{b_k - a_{kj}\} = b_i - a_{ij} \tag{2.2}$$

Selanjutnya, diberikan lemma yang membahas eksistensi dan ketunggalan penyelesaian sistem $A \otimes x = b$.

Lemma 2.6. [7] *Sistem $A \otimes x = b$ memiliki penyelesaian jika dan hanya jika setiap baris dari matriks A memiliki setidaknya satu solvable entry.*

Lemma 2.7. [7] *Diberikan sistem $A \otimes x = b$ yang memiliki penyelesaian. Penyelesaian sistem $A \otimes x = b$ tunggal jika dan hanya jika setiap baris dari matriks A memiliki solvable entry yang tunggal.*

3. ALJABAR MAX-PLUS INTERVAL

Pada bagian ini membahas konsep dasar aljabar max-plus interval, teknik pengoperasian matriks atas aljabar max-plus interval dan sistem interval persamaan linear max-plus. Pembahasan lebih lengkap dapat dilihat pada [2], [6], [5] dan [7].

3.1. Operasi Dasar atas Aljabar Max-Plus Interval.

Sebelum membahas konsep aljabar max-plus interval, terlebih dahulu diberikan definisi interval tertutup dalam aljabar max-plus.

Definisi 3.1. [7] *Interval tertutup a dalam $\mathbb{R}_{\max}$ adalah suatu himpunan bagian dari $\mathbb{R}_{\max}$ yang berbentuk*

$$\boldsymbol{a} = \langle \underline{a}, \bar{a} \rangle = \{a \in \mathbb{R}_{\max} \mid \underline{a} \le a \le \bar{a}\},$$

dengan $\underline{a}, \bar{a} \in \mathbb{R}_{\max}$ adalah batas bawah dan batas atas dari interval $\boldsymbol{a}$.

Interval $\boldsymbol{a}$ dalam $\mathbb{R}_{\max}$ yang didefinisikan pada Definisi 3.1 disebut interval max-plus, yang selanjutnya cukup disebut interval. Selanjutnya, didefinisikan himpunan semua interval dalam $\mathbb{R}_{\max}$ sebagai berikut :

$$\mathcal{I}(\mathbb{R}_{\max}) := \{\boldsymbol{a} = \langle \underline{a}, \bar{a} \rangle \mid \underline{a}, \bar{a} \in \mathbb{R}, \varepsilon < \underline{a} \le \bar{a}\} \cup \{\langle \varepsilon, \varepsilon \rangle\}.$$

Definisi 3.2. [7] *Diberikan $\mathcal{I}(\mathbb{R}_{\max})$ himpunan semua interval dalam aljabar max-plus. Pada $\mathcal{I}(\mathbb{R}_{\max})$ didefinisikan operasi berikut:*

$$\boldsymbol{a} \bar{\oplus} \boldsymbol{b} := \langle \underline{a} \oplus \underline{b}, \bar{a} \oplus \bar{b} \rangle \text{ dan } \boldsymbol{a} \bar{\otimes} \boldsymbol{b} := \langle \underline{a} \otimes \underline{b}, \bar{a} \otimes \bar{b} \rangle$$

untuk setiap $\boldsymbol{a} = \langle \underline{a}, \bar{a} \rangle, \boldsymbol{b} = \langle \underline{b}, \bar{b} \rangle \in \mathcal{I}(\mathbb{R}_{\max})$

Lemma 3.3. [6] *Misalkan* $\boldsymbol{a} = \langle \underline{a}, \bar{a} \rangle, \boldsymbol{b} = \langle \underline{b}, \bar{b} \rangle \in \mathcal{I}(\mathbb{R}_{\max})$ *sedemikian hingga berlaku*

(1) $\boldsymbol{a} \bar{\oplus} \boldsymbol{b} := \{a \oplus b \mid a \in \boldsymbol{a}, b \in \boldsymbol{b}\}$.
(2) $\boldsymbol{a} \bar{\otimes} \boldsymbol{b} := \{a \otimes b \mid a \in \boldsymbol{a}, b \in \boldsymbol{b}\}$.

Bukti. Diambil sebarang interval $\boldsymbol{a} = \langle \underline{a}, \bar{a} \rangle, \boldsymbol{b} = \langle \underline{b}, \bar{b} \rangle \in \mathcal{I}(\mathbb{R}_{\max})$.

(1) Diambil sebarang $c \in \{a \oplus b \mid a \in \boldsymbol{a}, b \in \boldsymbol{b}\}$ sehingga terdapat $a \in \boldsymbol{a}$ dan $b \in \boldsymbol{b}$ sedemikian hingga $c = a \oplus b$. Karena $\underline{a} \leq a \leq \bar{a}$ dan $\underline{b} \leq b \leq \bar{b}$ sehingga diperoleh $\max\{\underline{a}, \underline{b}\} \leq \max\{a, b\} \leq \max\{\bar{a}, \bar{b}\}$. Jadi, diperoleh $a \oplus \underline{b} \leq a \oplus b \leq \bar{a} \oplus \bar{b}$. Akibatnya, $c \in \langle \underline{a} \oplus \underline{b}, \bar{a} \oplus \bar{b} \rangle$ sehingga $\{a \oplus b \mid a \in \boldsymbol{a}, b \in \boldsymbol{b}\} \subseteq \boldsymbol{a} \bar{\oplus} \boldsymbol{b}$. Diambil sebarang $d \in \boldsymbol{a} \bar{\oplus} \boldsymbol{b}$ sehingga $\underline{a} \oplus \underline{b} \leq d \leq \bar{a} \oplus \bar{b}$.
   - Jika $\underline{a} \oplus \underline{b} = \underline{a}$ dan $\bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{a}$, maka $\underline{b} \leq \underline{a} \leq d \leq \bar{a}$. Oleh karena itu, diperoleh $d = \bar{d} \oplus \underline{b}$ dengan $d \in \boldsymbol{a}, \underline{b} \in \boldsymbol{b}$.
   - Jika $a \oplus \underline{b} = \underline{a}$ dan $\bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{b}$, maka $\underline{b} \leq \underline{a} \leq d \leq \bar{b}$. Oleh karena itu, diperoleh $d = \underline{a} \oplus d$ dengan $\underline{a} \in \boldsymbol{a}, d \in \boldsymbol{b}$.
   - Jika $\underline{a} \oplus \underline{b} = \underline{b}$ dan $\bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{a}$, maka $\underline{a} \leq \underline{b} \leq d \leq \bar{a}$. Oleh karena itu, diperoleh $d = d \oplus \underline{b}$ dengan $d \in \boldsymbol{a}, \underline{b} \in \boldsymbol{b}$.
   - Jika $\underline{a} \oplus \underline{b} = \underline{b}$ dan $\bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{b}$, maka $\underline{a} \leq \underline{b} \leq d \leq \bar{b}$. Oleh karena itu, diperoleh $d = \underline{a} \oplus d$ dengan $\underline{a} \in \boldsymbol{a}, d \in \boldsymbol{b}$.

   Jadi, diperoleh $d \in \{a \oplus b \mid a \in \boldsymbol{a}, b \in \boldsymbol{b}\}$. Akibatnya, $\boldsymbol{a} \bar{\oplus} \boldsymbol{b} \subseteq \{a \oplus b \mid a \in \boldsymbol{a}, b \in \boldsymbol{b}\}$. Dengan demikian, diperoleh $\boldsymbol{a} \bar{\oplus} \boldsymbol{b} = \{a \oplus b \mid a \in \boldsymbol{a}, b \in \boldsymbol{b}\}$.

(2) Diambil sebarang $z \in \{a \otimes b \mid a \in \boldsymbol{a}, b \in \boldsymbol{b}\}$ sehingga terdapat $a \in \boldsymbol{a}$ dan $b \in \boldsymbol{b}$ sedemikian hingga $z = a \otimes b$. Karena $\underline{a} \leq a \leq \bar{a}$ dan $\underline{b} \leq b \leq \bar{b}$ sehingga $\underline{a} \otimes \underline{b} \leq a \otimes b \leq \bar{a} \otimes \bar{b}$. Jadi, $z \in \langle \underline{a} \otimes \underline{b}, \bar{a} \otimes \bar{b} \rangle$ sehingga $\{a \otimes b \mid a \in \boldsymbol{a}, b \in \boldsymbol{b}\} \subseteq \boldsymbol{a} \bar{\otimes} \boldsymbol{b}$. Diambil sebarang $d \in \boldsymbol{a} \bar{\otimes} \boldsymbol{b}$ sehingga $\underline{a} \otimes \underline{b} \leq d \leq \bar{a} \otimes \bar{b}$. Andaikan skalar $d \notin \{a \otimes b \mid a \in \boldsymbol{a}, b \in \boldsymbol{b}\}$ sehingga $d \neq a \otimes b$ untuk suatu $a \in \boldsymbol{a}$ dan $b \in \boldsymbol{b}$. Oleh karena itu, $d < a \otimes b$ atau $d > a \otimes b$. Karena $\underline{a} \leq a \leq \bar{a}$ dan $\underline{b} \leq b \leq \bar{b}$ sehingga diperoleh $\underline{a} \otimes \underline{b} \leq a \otimes b \leq \bar{a} \otimes \bar{b}$. Dengan demikian, diperoleh

$$d < a \otimes b \leq \bar{a} \otimes \bar{b} \text{ atau } d > a \otimes b \geq \underline{a} \otimes \underline{b}$$

sehingga

$$d < \bar{a} \otimes \bar{b} \text{ atau } d > \underline{a} \otimes \underline{b}. \tag{3.1}$$

   Persamaan (3.1) kontradiksi dengan yang diketahui. Dengan demikian, skalar $d \in \{a \otimes b \mid a \in \boldsymbol{a}, b \in \boldsymbol{b}\}$ sehingga $\boldsymbol{a} \bar{\otimes} \boldsymbol{b} \subseteq \{a \otimes b \mid a \in \boldsymbol{a}, b \in \boldsymbol{b}\}$. Jadi, diperoleh $\boldsymbol{a} \bar{\otimes} \boldsymbol{b} = \{a \otimes b \mid a \in \boldsymbol{a}, b \in \boldsymbol{b}\}$.

□

3.2. Matriks Interval atas Aljabar Max-Plus Interval.

Didefinisikan $\mathcal{I}(\mathbb{R}_{\max}^{m \times n}) := \{\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij}) : \boldsymbol{a}_{ij} \in \mathcal{I}(\mathbb{R}_{\max}), \text{untuk } i \in \bar{m}, j \in \bar{n}\}$. Matriks anggota $\mathcal{I}(\mathbb{R}_{\max}^{m \times n})$ disebut matriks interval max-plus. Selanjutnya, matriks interval max-plus cukup disebut dengan matriks interval. Matriks interval $\boldsymbol{A} \in \mathcal{I}(\mathbb{R}_{\max}^{m \times n})$ dapat ditulis sebagai

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m1} & \boldsymbol{a}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \langle \underline{a}_{11},\bar{a}_{11}\rangle & \langle \underline{a}_{12},\bar{a}_{12}\rangle & \cdots & \langle \underline{a}_{1n},\bar{a}_{1n}\rangle \\ \langle \underline{a}_{21},\bar{a}_{21}\rangle & \langle \underline{a}_{22},\bar{a}_{22}\rangle & \cdots & \langle \underline{a}_{2n},\bar{a}_{2n}\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \underline{a}_{m1},\bar{a}_{m1}\rangle & \langle \underline{a}_{m2},\bar{a}_{m2}\rangle & \cdots & \langle \underline{a}_{mn},\bar{a}_{mn}\rangle \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

dengan $\boldsymbol{a}_{ij} \in \mathcal{I}(\mathbb{R}_{\max})$. Selanjutnya, diberikan definisi matriks batas bawah dan matriks batas atas matriks interval.

Definisi 3.4. [5]*Diberikan* $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_{ij}) \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^{m\times n}_{\max})$ *dengan* $\boldsymbol{a}_{ij}=\langle \underline{a}_{ij},\bar{a}_{ij}\rangle$. *Selanjutnya, didefinisikan matriks* $\underline{A}=(\underline{a}_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}_{\max}$ *dan* $\bar{A}=(\bar{a}_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}_{\max}$, *yang berturut-turut disebut matriks batas bawah dan matriks batas atas matriks interval* $\boldsymbol{A}$. *Lebih lanjut, matriks interval* $\boldsymbol{A}$ *dapat dituliskan sebagai*

$$\boldsymbol{A}=\langle \underline{A},\bar{A}\rangle=\left\{A \in \mathbb{R}^{m\times n}_{\max} \mid \underline{A} \leq A \leq \bar{A}\right\}.$$

Definisi 3.5. [7]

(1) *Untuk* $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B} \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^{m\times n}_{\max})$ *didefinisikan* $\boldsymbol{A}\bar{\oplus}\boldsymbol{B} \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^{m\times n}_{\max})$ *dengan*

$$[\boldsymbol{A}\bar{\oplus}\boldsymbol{B}]_{ij}=[\boldsymbol{A}]_{ij}\bar{\oplus}[\boldsymbol{B}]_{ij}$$

untuk setiap $i \in \bar{m}, j \in \bar{n}$.

(2) *Untuk* $\boldsymbol{a} \in \mathcal{I}(\mathbb{R}_{\max})$ *dan* $\boldsymbol{A} \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^{m\times p}_{\max})$ *didefinisikan* $\boldsymbol{a}\bar{\otimes}\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}_{\max}$ *dengan*

$$[\boldsymbol{a}\bar{\otimes}\boldsymbol{A}]_{ij}=\boldsymbol{a}\bar{\otimes}[\boldsymbol{A}]_{ij}$$

untuk setiap $i \in \bar{m}, j \in \bar{n}$

(3) *Untuk* $\boldsymbol{A} \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^{m\times p}_{\max}), \boldsymbol{B} \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^{p\times n}_{\max})$ *didefinisikan* $\boldsymbol{A}\bar{\otimes}\boldsymbol{B} \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^{m\times n}_{\max})$ *dengan*

$$[\boldsymbol{A}\bar{\otimes}\boldsymbol{B}]_{ij}=\overline{\bigoplus_{k=1}^{p}}[\boldsymbol{A}]_{ik}\bar{\otimes}[\boldsymbol{B}]_{kj}$$

untuk setiap $i \in \bar{m}, j \in \bar{n}$.

Lemma 3.6. [6] *Diberikan matriks interval* $\boldsymbol{A}=\langle \underline{A},\bar{A}\rangle, \boldsymbol{B}=\langle \underline{B},\bar{B}\rangle \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^{n\times n}_{\max})$ *sedemikian hingga berlaku*

(1) $\boldsymbol{A}\bar{\oplus}\boldsymbol{B} := \{A \oplus B \mid A \in \boldsymbol{A}, B \in \boldsymbol{B}\}$.
(2) $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} := \{A \otimes B \mid A \in \boldsymbol{A}, B \in \boldsymbol{B}\}$.

Bukti. Pembuktian analog dengan pembuktian Lema 3.3. □

3.3. **Sistem Interval Persamaan Linear Max-Plus.**

Diberikan matriks interval $\boldsymbol{A} \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^{n\times n}_{\max})$, vektor $x \in \mathbb{R}^{n}_{\max}$ dan vektor interval $\boldsymbol{b} \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^{n}_{\max})$. Sistem interval

$$\boldsymbol{A}\bar{\otimes}x=\boldsymbol{b} \tag{3.3}$$

disebut sistem interval persamaan linear max-plus. Lebih lanjut, Sistem (3.3) terdiri dari himpunan semua sistem persamaan linear max-plus yang berbentuk

$$A \otimes x = b \tag{3.4}$$

dengan $A \in \boldsymbol{A}, x \in \mathbb{R}^n_{\max}$ dan $b \in \boldsymbol{b}$. Kemudian, setiap sistem yang berbentuk seperti Persamaan (3.4) disebut subsistem dari Sistem (3.3). Selanjutnya, diberikan definisi mengenai salah satu jenis khusus subsistem dari Sistem (3.3).

Definisi 3.7. [5] *Suatu subsistem dari Sistem (3.3) dikatakan extremal jika setiap persamaannya merupakan persamaan yang berbentuk* $(\underline{A} \otimes x)_i = \bar{b}_i$ *(persamaan bawah-atas) atau* $(\bar{A} \otimes x)_i = \underline{b}_i$ *(persamaan atas-bawah) untuk setiap* $i \in \bar{n}$.

Lebih lanjut, subsistem extremal dari Sistem (3.3) dengan hanya persamaan ke-i yang berbentuk persamaan bawah-atas dan yang lainnya berbentuk persamaan atas-bawah dinotasikan dengan

$$A^{(i)} \otimes x = b^{(i)}, i \in \bar{n} \tag{3.5}$$

dengan

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{i-1,1} & \bar{a}_{i-1,2} & \cdots & \bar{a}_{i-1,n} \\ \underline{a}_{i1} & \underline{a}_{i2} & \cdots & \underline{a}_{in} \\ \bar{a}_{i+1,1} & \bar{a}_{i+1,2} & \cdots & \bar{a}_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix}, b^{(i)} = \begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \vdots \\ \underline{b}_{i-1} \\ \bar{b}_i \\ \underline{b}_{i+1} \\ \vdots \\ \underline{b}_n \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya diberikan pembahasan mengenai tipe penyelesaian sistem interval persamaan linear max-plus yang stongly solvable.

Definisi 3.8. [5] *Sistem (3.3) dikatakan strongly solvable jika setiap subsistemnya memiliki penyelesaian, yaitu* $(\forall A \in \boldsymbol{A})(\forall b \in \boldsymbol{b})\,(\exists x \in \mathbb{R}^n_{\max})\,(A \otimes x = b)$.

Teorema 3.9. [2] *Sistem (3.3) strongly solvable jika dan hanya jika setiap subsistem extremalnya dengan tepat satu persamaan bawah-atas memiliki penyelesaian.*

Bukti. ($\Leftarrow$) Diketahui setiap subsistem extremal dari Sistem (3.3) dengan tepat satu persamaan bawah-atas memiliki penyelesaian. Akan ditunjukkan Sistem (3.3) strongly solvable. Andaikan terdapat subsistem dari Sistem (3.3) yang tidak memiliki penyelesaian yaitu subsistem

$$A \otimes x = b \text{ dengan } A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\max}, x, b \in \mathbb{R}^n_{\max} \tag{3.6}$$

Berdasarkan pengandaian diperoleh subpenyelesaian terbesar $x^*(A,b)$ bukan penyelesaian dari Subsistem (3.6) sehingga $A \otimes x^*(A,b) \neq b$. Oleh karena itu, terdapat $i \in \bar{n}$ sedemikian hingga berlaku

$$\bigoplus_{j=1}^{n} \left(a_{ij} \otimes x^*_j(A,b)\right) < b_i \tag{3.7}$$

Ekuivalen dengan terdapat $i \in \bar{n}$ sehingga berlaku $\max_{1\le j\le n}\left(a_{ij} + x^*_j(A,b)\right) < b_i$. Jadi, terdapat $i \in \bar{n}$ sehingga untuk setiap $j \in \bar{n}$ berlaku $a_{ij} + x^*_j(A,b) < b_i$. Berdasarkan Lema 2.3, terdapat $i \in \bar{n}$ sehingga untuk setiap $j \in \bar{n}$ berlaku

$$a_{ij} + \min_{1\le k\le n}\{b_k - a_{kj}\} < b_i \Leftrightarrow \min_{1\le k\le n}\{b_k - a_{kj}\} < b_i - a_{ij}. \tag{3.8}$$

Berdasarkan Persamaan (3.8) diperoleh bahwa baris ke- i dari matriks A tidak memiliki solvable entry sehingga

$$\min_{k\neq i}\{b_k - a_{kj}\} = \min_{1\leq k\leq n}\{b_k - a_{kj}\} \tag{3.9}$$

Selanjutnya, persamaan ke- i dari Subsistem (3.6) diganti dengan persamaan bawahatas dan persamaan yang lainnya adalah persamaan atas-bawah sehingga diperoleh subsistem extremal yang baru dari Sistem (3.3) yaitu $A'\otimes x = b'$. Karena subsistem extremal $A'\otimes x = b'$ diperoleh dari Subsistem (3.6) sehingga berdasarkan Persamaan

(3.8) dan Persamaan (3.9) diperoleh subpenyelesaian terbesar dari subsistem extremal $A'\otimes x = b'$ adalah

$$x_j^*(A', b') = \min_{1\leq k\leq n}\left\{\min_{k\neq i}\{\underline{b}_k - \bar{a}_{kj}\}, \bar{b}_i - \underline{a}_{ij}\right\}, \forall j \in \bar{n}$$

sehingga berdasarkan Persamaan (3.8) diperoleh

$$\underline{a}_{ij} + \min_{1\leq k\leq n}\left\{\min_{k\neq i}\{\underline{b}_k - \bar{a}_{kj}\}, \bar{b}_i - \underline{a}_{ij}\right\} < \bar{b}_i \Leftrightarrow \underline{a}_{ij} + x_j^*(A', b') < \bar{b}_i$$

Oleh karena itu, subpenyelesaian terbesar $x_j^*(A', b')$ bukan penyelesaian dari subsistem extremal $A'\otimes x = b'$. Akibatnya, diperoleh bahwa subsistem extremal $A'\otimes x = b'$ tidak memiliki penyelesaian. Hal ini kontradiksi dengan setiap subsistem extremal dari Sistem (3.3) dengan tepat satu persamaan bawah-atas memiliki penyelesaian. Jadi, Sistem (3.3) strongly solvable. □

Selanjutnya, diberikan definisi solvable interval dari sistem interval persamaan linear max-plus.

Definisi 3.10. [5] *Diberikan Sistem (3.3) dan matriks koefisien interval* $\boldsymbol{A}$ *yang berbentuk seperti persamaan (3.2). Entri interval* $\boldsymbol{a}_{ij} = \langle \underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}\rangle$ *disebut solvable interval dari Sistem (3.3) jika* $\min_{k\neq i}\{\underline{b}_k - \bar{a}_{kj}\} \geq \bar{b}_i - \underline{a}_{ij}$.

Lemma 3.11. [7] *Untuk sebarang Sistem (3.3) berlaku setiap kolom dari matriks interval* $\boldsymbol{A}$ *memiliki paling banyak satu solvable interval.*

Bukti. Diambil sebarang sistem interval

$$\boldsymbol{A}\otimes x = \boldsymbol{b} \tag{3.10}$$

dengan $\boldsymbol{A} \in \mathcal{I}(\mathbb{R}_{\max}^{n\times n}), x \in \mathbb{R}_{\max}^n$ dan $\boldsymbol{b} \in \mathcal{I}(\mathbb{R}_{\max}^n)$. Akan ditunjukkan setiap kolom dari matriks interval $\boldsymbol{A}$ memiliki paling banyak satu solvable interval. Andaikan terdapat kolom ke- j dari matriks interval $\boldsymbol{A}$ di Sistem (3.10) memiliki dua solvable interval yaitu $\langle \underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}\rangle, \langle \underline{a}_{mj}, \bar{a}_{mj}\rangle$ dengan $i, j, m \in \bar{n}$ dan $m \neq i$. Karena $\langle \underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}\rangle$ solvable interval, maka berdasarkan Definisi 3.10 berlaku $\min_{k\neq i}\{\underline{b}_k - \bar{a}_{kj}\} \geq \bar{b}_i - \underline{a}_{ij}$. Oleh karena itu, diperoleh $\underline{b}_m - \bar{a}_{mj} \geq \bar{b}_i - \underline{a}_{ij} > \underline{b}_i - \bar{a}_{ij}$. Akibatnya, diperoleh $\underline{b}_m - \bar{a}_{mj} > \underline{b}_i - \bar{a}_{ij}$. Karena $\langle \underline{a}_{mj}, \bar{a}_{mj}\rangle$ solvable interval, maka diperoleh $\min_{k\neq m}\{\underline{b}_k - \bar{a}_{kj}\} \geq \bar{b}_m - \underline{a}_{mj}$. Dengan cara yang sama, diperoleh $\underline{b}_i - \bar{a}_{ij} > \underline{b}_m - \bar{a}_{mj}$.

Akibatnya, terdapat kontradiksi. Jadi, setiap kolom dari matriks interval $\boldsymbol{A}$ memiliki paling banyak satu solvable interval. □

Lemma 3.12. [5] *Entri interval $\boldsymbol{a}_{ij}$ adalah solvable interval dari Sistem (3.3) jika dan hanya jika $\underline{a}_{ij}$ merupakan solvable entry di subsistem extremal dari Sistem (3.3) yang berbentuk seperti (3.5).*

Bukti. Diketahui entri interval $\boldsymbol{a}_{ij}$ adalah solvable interval dari Sistem (3.3), sehingga berdasarkan Definisi 3.10 berlaku $\min_{k\neq i}\{\underline{b}_k - \bar{a}_{kj}\} \geq \bar{b}_i - \underline{a}_{ij}$. Akibatnya, diperoleh

$$\min_{1\leq k\leq n}\left\{\min_{k\neq i}\{\underline{b}_k - \bar{a}_{kj}\}, \bar{b}_i - \underline{a}_{ij}\right\} = \bar{b}_i - \underline{a}_{ij}.$$

Oleh karena itu, diperoleh bahwa entri $\underline{a}_{ij}$ merupakan solvable entry di subsistem extremal dari Sistem (3.3) yang berbentuk seperti (3.5). □

Akibat 3.13. [5] *Entri interval $\boldsymbol{a}_{ij}$ merupakan solvable interval dari Sistem (3.3) jika dan hanya jika untuk setiap subsistem dari Sistem (3.3) yang berbentuk seperti (3.4) a_{ij} merupakan solvable entry.*

Bukti. ($\Rightarrow$) Diketahui entri interval $\boldsymbol{a}_{ij}$ merupakan solvable interval dari Sistem (3.3), sehingga diperolah $\min_{k\neq i}\{\underline{b}_k - \bar{a}_{kj}\} \geq \bar{b}_i - \underline{a}_{ij}$. Akan ditunjukkan untuk setiap subsistem dari Sistem (3.3) yang berbentuk seperti (3.4) a_{ij} merupakan solvable entry. Diambil sebarang subsistem dari Sistem (3.3) yang berbentuk $A \otimes x = b$ dengan $A \in \boldsymbol{A}$ dan $b \in \boldsymbol{b}$ sehingga diperoleh

$$\min_{k\neq i}\{b_k - a_{kj}\} \geq \min_{k\neq i}\{\underline{b}_k - \bar{a}_{kj}\} \geq \bar{b}_i - \underline{a}_{ij} \geq b_i - a_{ij}$$

Oleh karena itu, diperoleh $\min_{k\neq i}\{b_k - a_{kj}\} \geq b_i - a_{ij}$. Dengan demikian, diperoleh

$$\min_{1\leq k\leq n}\{b_k - a_{kj}\} = \left\{\min_{k\neq i}\{b_k - a_{kj}\}, b_i - a_{ij}\right\} = b_i - a_{ij}$$

Jadi, diperoleh bahwa entri a_{ij} dari matriks A merupakan solvable entry di subsistem dari Sistem (3.3) yang berbentuk seperti (3.4).

($\Leftarrow$) Diketahui untuk setiap subsistem dari Sistem (3.3) yang berbentuk seperti 3.4, a_{ij} adalah solvable entry. Khususnya, untuk Subsistem (3.5), $\underline{a}_{ij}$ adalah solvable entry. Oleh karena itu, berdasarkan Lema 3.12 diperoleh $\boldsymbol{a}_{ij}$ adalah solvable interval dari Sistem (3.3). □

Akibat 3.14. [5] *Sistem (3.3) strongly solvable jika dan hanya jika setiap baris dari matriks interval $\boldsymbol{A}$ memiliki setidaknya satu solvable interval.*

Bukti. ($\Rightarrow$) Diketahui Sistem (3.3) strongly solvable, sehingga semua subsistemnya memiliki penyelesaian. Akibatnya, untuk setiap $i \in \bar{n}$ Subsistem (3.5) memiliki penyelesaian. Oleh karena itu, diperoleh bahwa setiap baris dari matriks $A^{(i)}$ memiliki setidaknya satu solvable entry. Lebih lanjut, setiap baris ke- i dari matriks $A^{(i)}$ memiliki setidaknya satu solvable entry yaitu terdapat $j_i \in \bar{n}$ sedemikian hingga $\underline{a}_{ij_i}$ solvable en try dari Subsistem (3.5). Oleh karena itu, berdasarkan Lema 3.12 diperoleh $\boldsymbol{a}_{ij_i}$ adalah solvable interval pada baris ke- i dari matriks interval $\boldsymbol{A}$. Karena berlaku untuk setiap $i \in \bar{n}$, maka untuk setiap baris dari matriks interval $\boldsymbol{A}$ setidaknya memiliki satu solvable interval.

($\Leftarrow$) Diketahui setiap baris dari matriks interval $\boldsymbol{A}$ setidaknya memiliki satu solvable interval, sehingga diperoleh bahwa untuk setiap subsistem dari Sistem (3.3) yang berbentuk seperti (3.4) berlaku setiap baris dari matriks A setidaknya memiliki satu solvable entry. Oleh karena itu, diperoleh bahwa semua subsistem dari Sistem (3.3) yang berbentuk seperti (3.4) memiliki penyelesaian. Dengan demikian, semua subsistem dari Sistem (3.3) memiliki penyelesaian. Akibatnya, Sistem (3.3) strongly solvable. □

Teorema 3.15. [7] *Sistem (3.3) strongly solvable jika dan hanya jika setiap baris dari matriks interval $\boldsymbol{A}$ memiliki solvable interval yang tunggal.*

Bukti. ($\Rightarrow$) Diketahui Sistem (3.3) strongly solvable sehingga berdasarkan Akibat 3.14 diperoleh bahwa setiap baris dari matriks interval $\boldsymbol{A}$ memiliki setidaknya satu solvable interval. Berdasarkan Lema 3.11 diperoleh bahwa Sistem (3.3) memiliki setiap kolom dari matriks interval $\boldsymbol{A} \in \mathcal{I}(\mathbb{R}_{\max}^{n\times n})$ memiliki paling banyak satu solvable interval sehingga paling banyak ada n solvable interval dari Sistem (3.3). Akan ditunjukkan setiap baris dari matriks interval $\boldsymbol{A}$ hanya memiliki satu solvable interval. Andaikan terdapat suatu baris dari matriks interval $\boldsymbol{A}$ di Sistem (3.3) yang setidaknya memiliki dua solvable interval, sehingga jumlah solvable interval dari Sistem (3.3) lebih besar dari n. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan paling banyak ada n solvable interval dari Sistem (3.3). Dengan demikian, setiap baris dari matriks interval $\boldsymbol{A}$ hanya memiliki satu solvable interval. Jadi, setiap baris dari matriks interval $\boldsymbol{A}$ memiliki solvable interval yang tunggal.

($\Leftarrow$) Diketahui setiap baris dari matriks interval $\boldsymbol{A}$ memiliki solvable interval yang tunggal, sehingga Sistem (3.3) memiliki n solvable interval. Berdasarkan Lema 3.11, diperoleh bahwa solvable interval tersebut berada di kolom-kolom yang berbeda. Dinotasikan solvable interval tersebut sebagai $\langle \underline{a}_{1j_1}, \bar{a}_{1j_1} \rangle, \langle \underline{a}_{2j_2}, \bar{a}_{2j_2} \rangle, \ldots, \langle \underline{a}_{nj_n}, \bar{a}_{nj_n} \rangle$ dengan $j_1, j_2, \ldots, j_n$ menotasikan urutan dari $1, 2, \ldots, n$. Untuk setiap matriks $A \in \boldsymbol{A}$ dan vektor $b \in \boldsymbol{b}$ sehingga berdasarkan Akibat 3.13 diperoleh bahwa $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{nj_n}$ merupakan solvable entry dari subsistem $A \otimes x = b$. Dengan demikian, solvable entry tersebut berada di baris-baris yang berbeda, sehingga diperoleh bahwa subsistem $A \otimes x = b$ memiliki penyelesaian. Karena berlaku untuk setiap subsistem $A \otimes x = b$ dengan $A \in \boldsymbol{A}$ dan vektor $b \in \boldsymbol{b}$ memiliki penyelesaian, maka diperoleh Sistem (3.3) strongly solvable. □

Teorema 3.15 menginspirasi penyusunan algoritma 1 untuk menyelediki Sistem (3.3) strongly solvable atau tidak. Berikut langkah-langkah algoritma tersebut.

Algoritma 1 Diberikan Sistem (3.3) dengan

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \langle \underline{a}_{11}, \bar{a}_{11} \rangle & \langle \underline{a}_{12}, \bar{a}_{12} \rangle & \cdots & \langle \underline{a}_{1n}, \bar{a}_{1n} \rangle \\ \langle \underline{a}_{21}, \bar{a}_{21} \rangle & \langle \underline{a}_{22}, \bar{a}_{22} \rangle & \cdots & \langle \underline{a}_{2n}, \bar{a}_{2n} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \underline{a}_{m1}, \bar{a}_{m1} \rangle & \langle \underline{a}_{m2}, \bar{a}_{m2} \rangle & \cdots & \langle \underline{a}_{mn}, \bar{a}_{mn} \rangle \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \langle \underline{b}_1, \bar{b}_1 \rangle \\ \langle \underline{b}_2, \bar{b}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \underline{b}_n, \bar{b}_n \rangle \end{pmatrix}$$

(1) Dihitung matriks interval $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}}$ dengan

$$\boldsymbol{D}_{A,b} = \begin{pmatrix} \langle \underline{b}_1 - \bar{a}_{11}, \bar{b}_1 - \underline{a}_{11} \rangle & \cdots & \langle \underline{b}_1 - \bar{a}_{1n}, \bar{b}_1 - \underline{a}_{1n} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \underline{b}_n - \bar{a}_{n1}, \bar{b}_n - \underline{a}_{n1} \rangle & \cdots & \langle \underline{b}_n - \bar{a}_{nn}, \bar{b}_n - \underline{a}_{nn} \rangle \end{pmatrix}$$

(2) Dihitung vektor interval $\boldsymbol{c}$ dengan entri

$$\boldsymbol{c}_i = \left\langle \min_{1 \le k \le n} \{\underline{b}_k - \bar{a}_{ki}\}, \min_{1 \le k \le n} \{\bar{b}_k - \underline{a}_{ki}\} \right\rangle$$

untuk setiap $i \in \bar{n}$. Jika untuk $i \in \bar{n}$, terdapat $j_i \in \bar{n}$ sedemikian hingga

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}_i &= \left\langle \min_{1 \le k \le n} \{\underline{b}_k - \bar{a}_{ki}\}, \min_{1 \le k \le n} \{\bar{b}_k - \underline{a}_{ki}\} \right\rangle \\ &= \langle \underline{b}_{j_i} - \bar{a}_{j_i i}, \bar{b}_{j_i} - \underline{a}_{j_i i} \rangle \end{aligned}$$

maka dapat dilanjutkan ke langkah 3, jika kondisi tersebut tidak terpenuhi, maka sistem interval yang diberikan tidak strongly solvable.

(3) Dibandingkan nilai $\min_{k \neq j_i} \{\underline{b}_k - \bar{a}_{ki}\}$ dan $\bar{b}_{j_i} - \underline{a}_{j_i i}$ untuk $i \in \bar{n}$. Jika

$$\min_{k \neq j_i} \{\underline{b}_k - \bar{a}_{ki}\} \ge \bar{b}_{j_i} - \underline{a}_{j_i i}$$

$i \in \bar{n}$, maka diperoleh solvable interval dari Sistem interval yang diberikan adalah $\boldsymbol{a}_{j_i i}$ untuk $i, j \in \bar{n}$. Jika kondisi tersebut tidak terpenuhi, maka sistem interval yang diberikan tidak strongly solvable.

(4) Diperiksa jika $j_1, j_2, \ldots, j_n$ menunjukkan urutan $1, 2, \ldots, n$ maka sistem interval yang diberikan strongly solvable. Jika kondisi tersebut tidak terpenuhi, maka sistem interval yang diberikan tidak strongly solvable.

4. SOLUSI KUAT INTERVAL

Pada bagian ini akan dibahas tentang eksistensi dan ketunggalan solusi kuat interval dari sebuah sistem interval persamaan linear max-plus. Terlebih dahulu diberikan definisi solusi kuat interval dari Sistem (3.3).

4.1. Eksistensi Solusi Kuat Interval.

Definisi 4.1. [5] *Suatu vektor interval $\boldsymbol{x} \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n_{\max})$ disebut solusi kuat interval dari Sistem (3.3) jika*

(1) $(\forall x \in \boldsymbol{x})(\exists A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})(A \otimes x = b)$
(2) $(\forall A \in \boldsymbol{A})(\forall b \in \boldsymbol{b})(\exists x \in \boldsymbol{x})(A \otimes x = b)$.

Teorema 4.2. [5] *Jika Sistem (3.3) strongly solvable, maka*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) &= \langle x^*(\bar{A}, \underline{b}), x^*(\underline{A}, \bar{b}) \rangle \\ &= \{x^*(A, b) \in \mathbb{R}^n_{\max} \mid x^*(\bar{A}, \underline{b}) \le x^*(A, b) \le x^*(\underline{A}, \bar{b})\} \end{aligned} \tag{4.1}$$

adalah solusi kuat interval dari Sistem (3.3).

Bukti. Diberikan himpunan vektor $\boldsymbol{X} = \{x^*(A,b) \in \mathbb{R}^n_{\max} \mid A \in \boldsymbol{A}, b \in \boldsymbol{b}\}$ dengan $x^*(A,b)$ merupakan subpenyelesaian terbesar dari subsistem $A \otimes x = b$ di Sistem (3.3). Dapat ditunjukkan bahwa $\boldsymbol{X}$ merupakan himpunan solusi kuat interval dari Sistem (3.3). Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}^*(\mathbf{A},\mathbf{b})$. Pertama-tama akan ditunjukkan $\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{x}^*(\mathbf{A},\mathbf{b})$. Diambil sebarang $x^*(A,b) \in \boldsymbol{X}$. Berdasarkan Persamaan (2.1), untuk setiap $A \in \boldsymbol{A}, b \in \boldsymbol{b}$ berlaku $x^*(A,b) = \left(x^*_j(A,b)\right)$ dengan $x^*_j(A,b) = \min_{1\le k\le n}\{b_k - a_{kj}\}, j \in \bar{n}$. Oleh karena itu, untuk setiap $k,j \in \bar{n}$ berlaku $\underline{b}_k - \bar{a}_{kj} \le b_k - a_{kj} \le \bar{b}_k - \underline{a}_{kj}$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{array}{rccc} & \min\limits_{1\le k\le n}\{\underline{b}_k - \bar{a}_{kj}\} \le & \min\limits_{1\le k\le n}\{b_k - a_{kj}\} \le & \min\limits_{1\le k\le n}\left\{\bar{b}_k - \underline{a}_{kj}\right\} \\ \Leftrightarrow & x^*_j(\bar{A},\underline{b}) \le & x^*_j(A,b) \le & x^*_j(\underline{A},\bar{b}), j \in \bar{n} \\ \Leftrightarrow & x^*(\bar{A},\underline{b}) \le & x^*(A,b) \le & x^*(\underline{A},\bar{b}). \end{array}$$

Jadi, diperoleh $x^*(A,b) \in \boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ sehingga $\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan $\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Diambil sebarang vektor $\alpha = (\alpha_j) \in \boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ sehingga

$$\exists A = (a_{ij}) \in \boldsymbol{A}, \exists b = (b_i) \in \boldsymbol{b} \text{ dengan } i,j \in \bar{n} \tag{4.2}$$

sedemikian hingga $\alpha = x^*(A,b) \in \boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$. Karena Sistem (3.3) strongly solvable, maka berdasarkan Akibat 3.14 diperoleh bahwa setiap baris dari matriks interval $\boldsymbol{A}$ setidaknya memiliki satu solvable interval. Artinya, untuk setiap $i \in \bar{n}$ terdapat $j_i \in \bar{n}$ sehingga $\boldsymbol{a}_{ij_i} = \left\langle \underline{a}_{ij_i}, \bar{a}_{ij_i}\right\rangle$ adalah solvable interval dari Sistem (3.3). Lebih lanjut, berdasarkan Lema 3.12 diperoleh bahwa $\underline{a}_{ij_i}$ merupakan solvable entry di subsistem extremal dari Sistem (3.3) yang berbentuk seperti (3.5). Diberikan pemetaan

$$\begin{aligned} \pi : \{1,2,\ldots,n\} &\to \{1,2,\ldots,n\} \\ \pi(i) &:= j_i \end{aligned}$$

sehingga dengan menggunakan pemetaan tersebut diperoleh $\boldsymbol{a}_{1\pi(1)}, \boldsymbol{a}_{2\pi(2)}, \ldots, \boldsymbol{a}_{n\pi(n)}$ merupakan solvable interval dari Sistem (3.3).

Selanjutnya, akan ditentukan matriks A dan vektor b pada Persamaan (4.2) agar $\alpha \in \boldsymbol{X}$. Andaikan terdapat $i \in \bar{n}$ sedemikian hingga untuk setiap $b_i \in \left\langle \underline{b}_i, \bar{b}_i\right\rangle$ berlaku

$$b_i - \alpha_{\pi(i)} < \underline{a}_{i\pi(i)} \text{ atau } b_i - \alpha_{\pi(i)} > \bar{a}_{i\pi(i)}$$

dengan $\alpha_{\pi(i)} \in \left\langle x^*_{\pi(i)}(\bar{A},\underline{b}), x^*_{\pi(i)}(\underline{A},\bar{b})\right\rangle$. Akibatnya, diperoleh

$$\underline{b}_i - \alpha_{\pi(i)} \le b_i - \alpha_{\pi(i)} < \underline{a}_{i\pi(i)} \text{ atau } \bar{b}_i - \alpha_{\pi(i)} \ge b_i - \alpha_{\pi(i)} > \bar{a}_{i\pi(i)}$$

sehingga

$$a < \underline{a}_{i\pi(i)} \text{ atau } a > \bar{a}_{i\pi(i)}, \text{ untuk } a \in \left\langle \underline{b}_i - \alpha_{\pi(i)}, \bar{b}_i - \alpha_{\pi(i)}\right\rangle.$$

Jika $\bar{b}_i - \alpha_{\pi(i)} < \underline{a}_{i\pi(i)}$, maka dengan mengingat $\alpha_{\pi(i)} \in \left\langle x^*_{\pi(i)}(\bar{A},\underline{b}), x^*_{\pi(i)}(\underline{A},\bar{b})\right\rangle$ diperoleh

$$\bar{b}_i - \underline{a}_{i\pi(i)} < \alpha_{\pi(i)} \le x^*_{\pi(i)}(\underline{A},\bar{b}) = \min_{1\le k\le n}\left\{\bar{b}_k - \underline{a}_{k\pi(i)}\right\}$$

sehingga

$$\bar{b}_i - \underline{a}_{i\pi(i)} < \min_{1\leq k\leq n}\left\{\bar{b}_k - \underline{a}_{k\pi(i)}\right\} \text{ atau } \bar{b}_i - \underline{a}_{ij_i} < \min_{1\leq k\leq n}\left\{\bar{b}_k - \underline{a}_{kj_i}\right\} \qquad (4.3)$$

Berdasarkan Persamaan (4.3) dapat disimpulakan bahwa entri $\underline{a}_{ij_i}$ bukan solvable entry di subsistem extremal dari Sistem interval yang berbentuk seperti (3.5). Hal ini kontradiksi dengan pernyataan $\underline{a}_{ij_i}$ solvable entry di subsistem extremal dari Sistem interval yang berbentuk seperti (3.5).

Selanjutnya, jika $\underline{b}_i - \alpha_{\pi(i)} > \bar{a}_{i\pi(i)}$, maka dengan mengingat $\alpha_{\pi(i)} \in \left\langle x^*_{\pi(i)}(\bar{A}, \underline{b}), x^*_{\pi(i)}(\underline{A}, \bar{b})\right\rangle$ diperoleh

$$\min_{1\leq k\leq n}\left\{\underline{b}_k - \bar{a}_{k\pi(i)}\right\} = x^*_{\pi(i)}(\bar{A}, \underline{b}) \leq \alpha_{\pi(i)} < \underline{b}_i - \bar{a}_{i\pi(i)}$$

sehingga

$$\min_{1\leq k\leq n}\left\{\underline{b}_k - \bar{a}_{k\pi(i)}\right\} < \underline{b}_i - \bar{a}_{i\pi(i)} \qquad (4.4)$$

Karena $\boldsymbol{a}_{i\pi(i)}$ merupakan solvable interval, maka berdasarkan Definisi 3.10 berlaku

$$\min_{k\neq i}\left\{\underline{b}_k - \bar{a}_{k\pi(i)}\right\} \geq \bar{b}_i - \underline{a}_{i\pi(i)}$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned}\min_{1\leq k\leq n}\left\{\underline{b}_k - \bar{a}_{k\pi(i)}\right\} &= \min\left\{\min_{k\neq i}\left\{\underline{b}_k - \bar{a}_{k\pi(i)}\right\}, \underline{b}_i - \bar{a}_{i\pi(i)}\right\} \\ &\geq \min\left\{\bar{b}_i - \underline{a}_{i\pi(i)}, \underline{b}_i - \bar{a}_{i\pi(i)}\right\} \\ &= \underline{b}_i - \bar{a}_{i\pi(i)}\end{aligned}$$

sehingga

$$\min_{1\leq k\leq n}\left\{\underline{b}_k - \bar{a}_{k\pi(i)}\right\} \geq \underline{b}_i - \bar{a}_{i\pi(i)}. \qquad (4.5)$$

Diperhatikan Persamaan (4.4) dan (4.5) saling kontradiksi. Jadi, untuk setiap $i \in \bar{n}$, terdapat $b_i \in \langle \underline{b}_i, \bar{b}_i\rangle$ sedemikian hingga $\underline{a}_{i\pi(i)} \leq b_i - \alpha_{\pi(i)} \leq \bar{a}_{i\pi(i)}$. Selanjutnya, diberikan subsistem

$$A \otimes x = b \qquad (4.6)$$

dengan vektor $b = (b_i)$ dan matriks $A = (a_{ij})$ didefinisikan sebagai berikut :

$$\begin{cases} a_{ij} = b_i - \alpha_j & , j = \pi(i) \\ a_{ij} \in \boldsymbol{a}_{ij} & , j \neq \pi(i)\end{cases}$$

Karena Sistem (3.3) strongly solvable, maka berdasarkan Akibat 3.14 diperoleh bahwa setiap baris dari matriks interval $\boldsymbol{A}$ setidaknya memiliki satu solvable interval. Artinya, untuk setiap $i \in \bar{n}$ terdapat $j \in \bar{n}$ sehingga $\boldsymbol{a}_{ij} = \langle \underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}\rangle$ adalah solvable interval dari Sistem (3.3). Oleh karena itu, dapat dipilih solvable interval yang terletak pada kolom ke- j dari matriks interval $\boldsymbol{A}$ adalah $\boldsymbol{a}_{i_0 j}$. Jadi, diperoleh $a_{i_0 j}$ merupakan solvable entry dari Subsistem (4.6) sehingga untuk $j \in \bar{n}$ diperoleh subpenyelesaian terbesar dari Subsistem (4.6) yaitu

$$x^*_j(A, b) = \min_{1\leq k\leq n}\{b_k - a_{kj}\} = b_{i_0} - a_{i_0 j} = b_{i_0} - (b_{i_0} - \alpha_j) = \alpha_j. \qquad (4.7)$$

Berdasarkan Persamaan (4.7) diperoleh bahwa $\alpha_j = x_j^*(A, b)$ untuk $j \in \bar{n}$ artinya $\alpha = x^*(A, b)$ sehingga α merupakan subpenyelesaian terbesar dari Subsistem (4.6). Oleh karena itu, $\alpha \in \boldsymbol{X}$. Akibatnya, diperoleh $\boldsymbol{x}^*(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Dengan demikian, diperoleh $\boldsymbol{x}^*(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \boldsymbol{X}$ merupakan solusi kuat interval dari Sistem (3.3). □

Akibat 4.3. [5] *Sistem (3.3) memiliki suatu solusi kuat interval jika dan hanya jika sistem interval tersebut strongly solvable*

Bukti. ($\Rightarrow$) Diketahui Sistem (3.3) memiliki suatu solusi kuat interval, sehingga berdasarkan Definisi 3.8 diperoleh bahwa Sistem (3.3) strongly solvable.

($\Leftarrow$) Diketahui Sistem (3.3) strongly solvable, maka berdasarkan Teorema 4.2 diperoleh bahwa $\boldsymbol{x}^*(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \left\langle x^*(\bar{A}, \underline{b}), x^*(\underline{A}, \bar{b}) \right\rangle$ adalah solusi kuat interval dari Sistem (3.3). Dengan demikian, terbukti bahwa Sistem (3.3) memiliki suatu solusi kuat interval. □

4.2. Ketunggalan Solusi Kuat Interval.

Lemma 4.4. [7] *Solusi kuat interval dari Sistem interval (3.3) tunggal jika dan hanya jika penyelesaian dari setiap subsistemnya tunggal.*

Bukti. ($\Rightarrow$) Diketahui solusi kuat interval dari Sistem interval (3.3) tunggal sehingga berdasarkan Definisi 4.1 diperoleh bahwa Sistem interval 3.3 strongly solvable. Oleh karena itu, diperoleh semua subsistem dari Sistem interval (3.3) memiliki penyelesaian. Akan ditunjukkan penyelesaian dari setiap subsistem dari Sistem interval (3.3) tunggal. Andaikan penyelesaian dari setiap subsistemnya tidak tunggal sehingga dapat dimisalkan terdapat subsistem $A \otimes x = b$ dengan $A \in \boldsymbol{A}$ dan $b \in \boldsymbol{b}$ yang setidaknya memiliki dua penyelesaian. Dinamakan dua penyelesaian tersebut dengan y dan z dengan $y \neq z$. Akibatnya, dengan mengingat subsistem $A \otimes x = b$ setidaknya memiliki dua penyelesaian sehingga berdasarkan Definisi 4.1 diperoleh bahwa y dan penyelesaian dari subsistem yang lain membentuk solusi kuat interval dari Sistem interval (3.3). Demikian pula untuk z dan penyelesaian dari subsistem yang lain membentuk solusi kuat interval dari Sistem interval (3.3). Akibatnya, solusi kuat interval dari Sistem interval (3.3) tidak tunggal. Hal ini kontradiksi dengan yang diketahui. Jadi, penyelesaian dari setiap subsistem dari Sistem interval (3.3) tunggal.

($\Leftarrow$) Diketahui penyelesaian dari setiap subsistem dari Sistem interval (3.3) tunggal sehingga penyelesaian dari semua subsistem tersebut membentuk solusi kuat interval $\boldsymbol{x}$ dari Sistem interval (3.3). Andaikan terdapat y solusi kuat interval yang lain dari Sistem interval (3.3) dengan $\mathbf{y} \neq \boldsymbol{x}$, sehingga terdapat $x_0 \in \boldsymbol{x}$ dan $x_0 \notin \mathbf{y}$ atau terdapat $y_0 \in \mathbf{y}$ dan $y_0 \notin \boldsymbol{x}$.

Jika $x_0 \in \boldsymbol{x}$ dan $x_0 \notin \mathbf{y}$, maka berdasarkan Definisi 4.1 diperoleh bahwa untuk $x_0 \in \boldsymbol{x}$, terdapat $A_0 \in \boldsymbol{A}$ dan terdapat $b_0 \in \boldsymbol{b}$ sedemikian hingga berlaku $A_0 \otimes x_0 = b_0$. Berdasarkan yang diketahui diperoleh bahwa penyelesaian dari $A_0 \otimes x = b_0$ yang tunggal sehingga tidak ada $x \in \mathbf{y}$ yang menyebabkan $A_0 \otimes x = b_0$ untuk $A_0 \in \boldsymbol{A}$ dan $b_0 \in \boldsymbol{b}$. Akibatnya, y bukan solusi kuat interval dari Sistem interval (3.3). Hal ini kontradiksi dengan pengandaian. Demikian pula, jika terdapat $y_0 \in \mathbf{y}$ dan $y_0 \notin \boldsymbol{x}$, maka $\boldsymbol{x}$ bukan solusi kuat interval dari Sistem interval (3.3). Hal ini kontradiksi dengan yang diketahui. Jadi, Solusi kuat interval dari Sistem interval (3.3) tunggal. □

Lemma 4.5. [5] *Solusi kuat interval dari Sistem interval (3.3) tunggal jika dan hanya jika setiap solvable interval* $\boldsymbol{a}_{ij} = \langle \underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij} \rangle$ *memenuhi*

$$\min_{k \neq i} \{\underline{b}_k - \bar{a}_{kj}\} > \bar{b}_i - \underline{a}_{ij} \tag{4.8}$$

untuk setiap $i, j, k \in \bar{n}$.

Bukti. ($\Rightarrow$) Diketahui solusi kuat interval dari Sistem interval (3.3) tunggal. Andaikan terdapat solvable interval dari Sistem interval (3.3) yaitu $\boldsymbol{a}_{ij} = \langle \underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij} \rangle$ untuk suatu $i, j \in \bar{n}$ sehingga berdasarkan Definisi 3.10 berlaku

$$\min_{k \neq i} \{\underline{b}_k - \bar{a}_{kj}\} \geq \bar{b}_i - \underline{a}_{ij} \tag{4.9}$$

untuk suatu $i, k, j \in \bar{n}$. Berdasarkan Lema 3.12 diperoleh bahwa $\underline{a}_{ij}$ merupakan solvable entry dari kolom ke- j matriks $A^{(i)}$ di Subsistem extremal (3.5). Jika terdapat $m \in \bar{n}$ dengan $m \neq i$ sedemikian hingga $\underline{b}_m - \bar{a}_{mj} = \bar{b}_i - \underline{a}_{ij}$, maka berdasarkan Persamaan 4.9 diperoleh

$$\min_{1 \leq k \leq n} \left\{ \min_{k \neq i} \{\underline{b}_k - \bar{a}_{kj}, \bar{b}_i - \underline{a}_{ij}\} \right\} = \bar{b}_i - \underline{a}_{ij} = \underline{b}_m - \bar{a}_{mj}$$

Oleh karena itu, $\bar{a}_{mj}$ juga merupakan solvable entry dari kolom ke- j di Subsistem extremal (3.5). Dengan demikian, terdapat kolom ke- j matriks $A^{(i)}$ di Subsistem extremal (3.5) yang memiliki solvable entry yang tidak tunggal yaitu entri $\underline{a}_{ij}$ dan $\bar{a}_{mj}$ untuk suatu $i, j, m \in \bar{n}$. Akibatnya, diperoleh solusi dari Subsistem extremal (3.5) tidak tunggal. Akibatnya, berdasarkan Lema 4.4 diperoleh solusi kuat interval dari Sistem interval (3.3) tidak tunggal. Hal ini kontradiksi dengan yang diketahui. Jadi, setiap solvable interval $\boldsymbol{a}_{ij} = \langle \underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij} \rangle$ memenuhi

$$\min_{k \neq i} \{\underline{b}_k - \bar{a}_{kj}\} > \bar{b}_i - \underline{a}_{ij} \tag{4.10}$$

($\Leftarrow$) Diketahui Sistem interval (3.3) strongly solvable, sehingga berdasarkan Teorema 3.15 diperoleh setiap baris dari matriks interval $\boldsymbol{A}$ memiliki solvable interval yang tunggal. Dengan mengingat Lema 3.11 bahwa setiap kolom dari matriks interval $\boldsymbol{A}$ memiliki paling banyak satu solvable interval sehingga solvable interval dari Sistem interval (3.3) terletak pada kolom-kolom yang berbeda. Dinamakan solvable interval tersebut dengan $\langle \underline{a}_{1j_1}, \bar{a}_{1j_1} \rangle, \langle \underline{a}_{2j_2}, \bar{a}_{2j_2} \rangle, \ldots, \langle \underline{a}_{nj_n}, \bar{a}_{nj_n} \rangle$ dengan $j_1, j_2, \ldots, j_n$ menunjukkan urutan $1, 2, \ldots, n$. Lebih lanjut, berdasarkan Akibat 3.13 diperoleh untuk setiap subsistem $A \otimes x = b$ dari Sistem interval (3.3), entri a_{ij_i} dari A merupakan solvable entry untuk $i \in \bar{n}$. Jadi berlaku

$$\min_{1 \leq k \leq n} \{b_k - a_{kj_i}\} = b_i - a_{ij_i}$$

sehingga diperoleh

$$\min_{k \neq i} \{b_k - a_{kj_i}\} \geq b_i - a_{ij_i}$$

Lebih lanjut, diperoleh

$$\min_{k \neq i} \{b_k - a_{kj_i}\} \geq \min_{k \neq i} \{\underline{b}_k - \bar{a}_{kj_i}\} > \bar{b}_i - \underline{a}_{ij_i} \geq b_i - a_{ij_i}$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\min_{k\neq i}\{b_k - a_{kj_i}\} > b_i - a_{ij_i} \tag{4.11}$$

Jadi dari Persamaan (4.11) diperoleh bahwa

$$\min_{1\leq k\leq n}\left\{\min_{k\neq i}\{b_k - a_{kj_i}\}, b_i - a_{ij_i}\right\} = b_i - a_{ij_i}$$

sehingga diperoleh a_{ij_i} merupakan solvable entry yang tunggal dan terletak pada kolom ke- j_i dari matriks A, untuk $i \in \bar{n}$. Dengan demikian, setiap kolom dari matriks A memiliki solvable entry yang tunggal. Karena Sistem interval (3.3) strongly solvable, maka setiap subsistem $A \otimes x = b$ dari Sistem interval (3.3) memiliki penyelesaian. Oleh karena itu, diperoleh bahwa penyelesaian dari semua subsistem $A \otimes x = b$ dari Sistem interval (3.3) tunggal. Dengan menggunakan Lema 4.4 diperoleh solusi kuat interval dari Sistem interval (3.3) tunggal. □

Teorema 4.6. [5] *Solusi kuat interval dari Sistem interval (3.3) tunggal jika dan hanya jika untuk setiap $i \in \bar{n}$, penyelesaian dari Subsistem extremal (3.5) tunggal.*

Bukti. ($\Rightarrow$) Diketahui solusi kuat interval dari Sistem interval (3.3) tunggal sehingga berdasarkan Lema 4.4 diperoleh penyelesaian setiap subsistem dari Sistem interval (3.3) tunggal. Mengingat Subsistem extremal (3.5) merupakan jenis khusus dari subsistem di Sistem interval (3.3). Oleh karena itu, diperoleh untuk setiap $i \in \bar{n}$, penyelesaian dari Subsistem extremal (3.5) tunggal.

($\Leftarrow$) Akan ditunjukkan solusi kuat interval dari Sistem interval (3.3) tunggal. Andaikan solusi kuat interval dari Sistem interval (3.3) tidak tunggal. Berdasarkan Lema (4.5) terdapat solvable interval dari Sistem interval (3.3) yaitu $\boldsymbol{a}_{ij} = \langle \underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}\rangle$ untuk suatu $i, j \in \bar{n}$ sehingga berdasarkan Definisi 3.10 berlaku

$$\min_{k\neq i}\{\underline{b}_k - \bar{a}_{kj}\} \geq \bar{b}_i - \underline{a}_{ij} \tag{4.12}$$

untuk suatu $i, k, j \in \bar{n}$. Berdasarkan Lema 3.12 diperoleh bahwa $\underline{a}_{ij}$ merupakan solvable entry dari kolom ke- j matriks $A^{(i)}$ di Subsistem extremal (3.5). Jika terdapat $l \in \bar{n}$ dengan $l \neq i$ sedemikian hingga $\underline{b}_l - \bar{a}_{lj} = \bar{b}_i - \underline{a}_{ij}$, maka berdasarkan Persamaan (4.12) diperoleh

$$\min_{1\leq k\leq n}\left\{\min_{k\neq i}\{\underline{b}_k - \bar{a}_{kj}, \bar{b}_i - \underline{a}_{ij}\}\right\} = \bar{b}_i - \underline{a}_{ij} = \underline{b}_l - \bar{a}_{lj}$$

Oleh karena itu, $\bar{a}_{lj}$ juga merupakan solvable entry dari kolom ke- j di Subsistem extremal (3.5). Dengan demikian, terdapat kolom ke- j matriks $A^{(i)}$ di Subsistem extremal (3.5) yang memiliki solvable entry yang tidak tunggal yaitu entri $\underline{a}_{ij}$ dan $\bar{a}_{mj}$ untuk suatu $i, j, m \in \bar{n}$. Karena penyelesaian dari Subsistem extremal tunggal, sehingga diperoleh bahwa untuk setiap kolom dari matriks $A^{(i)}$ memiliki solvable entry yang tunggal. Hal ini kontradiksi dengan pengandaian yang menyatakan bahwa terdapat kolom ke- j matriks $A^{(i)}$ di Subsistem extremal (3.5) yang memiliki solvable entry yang tidak tunggal yaitu entri $\underline{a}_{ij}$ dan $\bar{a}_{mj}$ untuk suatu $i, j, m \in \bar{n}$. Jadi, solusi kuat interval dari Sistem interval (3.3) tunggal. □

Berdasarkan Teorema 4.6, ketunggalan solusi kuat interval dari suatu sistem interval dengan n persamaan dapat diperiksa dari n subsistem extremal dari jumlah subsistem yang tak terhitung banyaknya. Hasil ini dapat menginspirasi penyusunan algoritma 2 untuk memeriksa ketunggalan solusi kuat interval dari suatu sistem interval. Berikut ini langkah-langkah algoritma tersebut.

Algoritma 2 Diberikan Sistem interval (3.3) dengan

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \langle \underline{a}_{11}, \bar{a}_{11} \rangle & \langle \underline{a}_{12}, \bar{a}_{12} \rangle & \dots & \langle \underline{a}_{1n}, \bar{a}_{1n} \rangle \\ \langle \underline{a}_{21}, \bar{a}_{21} \rangle & \langle \underline{a}_{22}, \bar{a}_{22} \rangle & \dots & \langle \underline{a}_{2n}, \bar{a}_{2n} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \underline{a}_{m1}, \bar{a}_{m1} \rangle & \langle \underline{a}_{m2}, \bar{a}_{m2} \rangle & \dots & \langle \underline{a}_{mn}, \bar{a}_{mn} \rangle \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \langle \underline{b}_1, \bar{b}_1 \rangle \\ \langle \underline{b}_2, \bar{b}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \underline{b}_n, \bar{b}_n \rangle \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

(1) Untuk subsistem extremal $A^{(1)}x = b^{(1)}$, dicari solvable entry pada kolom pertama dari $A^{(1)}$
- Dihitung $\rho_1^{(1)} = \min \left\{ b_1^{(1)} - a_{11}^{(1)}, b_2^{(1)} - a_{21}^{(1)}, \dots, b_n^{(1)} - a_{n1}^{(1)} \right\}$
- Dicari entri $a_{i1}^{(1)}$ sedemikian hingga $b_i^{(1)} - a_{i1}^{(1)} = \rho_1^{(1)}$ dengan $1 \le i \le n$.

Jika entri $a_{i1}^{(1)}$ tunggal, maka lanjut ke langkah selanjutnya. Jika tidak memenuhi kondisi tersebut, maka subsistem extremal $A^{(1)} \otimes x = b^{(1)}$ tidak memiliki penyelesaian tunggal.

(2) Demikian pula, dicari solvable entry pada setiap kolom dari $A^{(1)}$ yaitu untuk setiap $k \in \bar{n}$
- Dihitung $\rho_k^{(1)} = \min \left\{ b_1^{(1)} - a_{1k}^{(1)}, b_2^{(1)} - a_{2k}^{(1)}, \dots, b_n^{(1)} - a_{nk}^{(1)} \right\}$
- Dicari entri $a_{ik}^{(1)}$ sedemikian hingga $b_i^{(1)} - a_{ik}^{(1)} = \rho_k^{(1)}$ dengan $1 \le i \le n$.

Jika entri $a_{ik}^{(1)}$ tunggal untuk setiap $k \in \bar{n}$, maka selanjutnya dimisalkan $S_1 = \left\{ a_{i_1 1}^{(1)}, a_{i_2 2}^{(1)}, \dots, a_{i_n n}^{(1)}, \right\}$ dengan $a_{i_l l}^{(1)} (1 \le l \le n)$ merupakan solvable entry tunggal yang terletak pada kolom ke-l dari matriks $A^{(1)}$. Jika tidak memenuhi kondisi tersebut, maka subsistem extremal $A^{(1)}x = b^{(1)}$ tidak memiliki penyelesaian tunggal.

(3) Diperiksa apakah $i_1, i_2, \dots, i_n$ adalah suatu urutan dari $1, 2, \dots, n$. Jika kondisi tersebut terpenuhi, maka subsistem extremal $A^{(1)}x = b^{(1)}$ memiliki penyelesaian tunggal.

(4) Demikian pula, diperiksa setiap subsistem extremal yang diberikan pada 4.13 memiliki penyelesaian yang tunggal dengan mengulang langkah 1 sampai dengan 3. Jika kondisi tersebut terpenuhi, maka diperoleh vektor interval 4.13 adalah solusi kuat interval tunggal dari Sistem interval 4.13.

5. PENUTUP

Beberapa kesimpulan yang diperoleh:

(1) Kriteria dari eksistensi solusi kuat interval dari sistem interval persamaan linear Max-plus adalah suatu sistem interval memiliki suatu solusi kuat interval jika dan hanya jika sistem tersebut strongly solvable.
(2) Kriteria ketunggalan solusi kuat interval dari sistem interval persamaan linear Max-plus adalah suatu sistem interval memiliki suatu solusi kuat interval yang tunggal jika dan hanya jika setiap subsistem extremalnya dengan tepat satu persamaan bawah-atas memiliki penyelesaian yang tunggal.
(3) Pembuktian dari eksistensi solusi kuat interval dari sistem interval persamaan linear Max-plus bersifat konstruktif dan menghasilkan rumus untuk menghitung solusi kuat interval
(4) Kriteria ketunggalan solusi kuat interval menghasilkan algoritma yang dapat memverifikasi ketunggalan solusi kuat interval dari sistem interval persamaan linear max-plus.
(5) Salah satu masalah yang melekat pada sistem kontrol adalah merancang input sehingga keluarannya dapat memenuhi persyaratan yang telah ditentukan sebelumnya. Pada sistem kontrol Max-plus yang tidak pasti dengan parameternya berbentuk interval, maka solusi kuat interval dapat diterapkan untuk menentukan kisaran input sedemikian rupa sistem dapat menghasilkan keluaran pada periode waktu tertentu.

Referensi

[1] Bacelli, F., Cohen, G., Olsder, G.J. dan Quadrat, J.P., Synchronization and Linearity, John Wiley and Sons, New York, 1992.
[2] Cechl´arova, K. dan Cuninghame-Green, R.A., Interval Systems of Max-separable Linear Equations, Linear Algebra and its Application 340 (2002), 215-224.
[3] Cuninghame-Green, R., Minimax Algebra, Springer-Verlag, New York, 1979.
[4] Heidergott, B., Olsder, G. J. dan van der Woude, J., Max Plus at Work, Princeton University Press, New Jersey, 2006.
[5] Wang, C. dan Tao, Y., Interval Strong Solutions of Interval Systems of Max-plus Linear Equations, Linear Algebra and its Applications, 537 (2018), 148-159.
[6] Wang, C., Tao, Y. dan Yang, P., Reachability for Interval Max-Plus Linear Systems, Proceedings of the 36th Chinese Control Conference, (2017), 26-28.
[7] Zhang, H., Tao, Y. dan Zhang, Z., Strong Solvability of Interval Max-plus Systems and Applications to Optimal Control, Systems and Control Letter, 96 (2016), 88-94.

FATHIN AZKIYA* (Penulis Korespondensi)
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia.
fazkiya@gmail.com

ARI SUPARWANTO
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia.
ari_suparwanto@ugm.ac.id