

**Perspektif Model Matematika pada
Penyebaran COVID-19 dengan Karantina**
(Mathematical Model Perspective for the Spread of
Coronavirus Disease (COVID-19) by Isolation)

ISMIA TUL KHUSNA*, LINA ARYATI

Abstract. This research discussed about mathematical model for the spread of coronavirus disease (COVID-19) by isolation. In this case, the population was divided into 6 classes, they are suspected, exposed, isolated, infected, hospitalized, and recovered. In this research, a modified SEIR model was formulated by considering the hospitalized, and recovered classes. Furthermore, the free disease and endemic equilibrium points were found along with the local stability for both equilibrium points. Both of equilibrium points were locally asymptotically stable if the certain conditions was satisfied. The Next Generation matrix method was used to determine the basic reproduction number and global stability of free disease equilibrium point. Numerical simulation was presented to describe the model's behavior, and based on the elasticity analysis on the basic reproduction number, several parameters that affect COVID-19 spreading was exist.

Keywords: COVID-19, isolation, basic reproduction number.

Abstrak. Pada penelitian ini dibahas tentang model matematika penyebaran COVID-19 dengan karantina. Dalam hal ini, populasi dibagi menjadi 6 kelas, yakni kelas suspected, exposed, isolated, infected, hospitalized, dan recovered. Pada penelitian ini, dibentuk model matematika yang memodifikasi model SEIR dengan mempertimbangkan adanya kelas karantina dan hospitalized. Selanjutnya, dicari titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik dan diselidiki sifat kestabilan dari kedua titik ekuilibrium tersebut. Titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik stabil asimtotik lokal jika memenuhi syarat-syarat tertentu. Metode Next Generation Matrix digunakan untuk menentukan bilangan reproduksi dasar dan kestabilan global titik ekuilibrium bebas penyakit. Simulasi numerik digunakan untuk menggambarkan perilaku dari model yang telah diperoleh kemudian berdasarkan analisis sensitivitas bilangan reproduksi dasar, diperoleh beberapa parameter yang berpengaruh terhadap penyebaran COVID-19.

Kata-kata kunci: COVID-19, karantina, bilangan reproduksi dasar.

1. PENDAHULUAN

Coronavirus disease 2019 (COVID-19) adalah suatu penyakit yang disebabkan oleh jenis baru virus korona yang dikenal dengan severe acute respiratory syndrom coronavirus 2 (SARS-COV-2). Virus tersebut diketahui bermula dari kota Wuhan, Cina pada Desember 2019. COVID-19 dapat menular dari manusia ke manusia melalui cairan yang keluar dari hidung atau mulut ketika seseorang yang terinfeksi batuk ataupun bersin. Cairan tersebut kemudian mengkontaminasi benda atau permukaan yang ada di sekitarnya, sehingga jika seseorang yang tidak terinfeksi menyentuh benda atau permukaan tersebut, kemudian orang tersebut menyentuh mata, hidung, ataupun mulutnya, akibatnya orang tersebut akan terinfeksi. [1]

Banyaknya pasien terkonfirmasi positif secara global berdasarkan data yang dipublikasikan oleh WHO [2], hingga 10 Januari 2021 bertambah sebanyak 833.405 kasus dengan jumlah kumulatif sejak kasus pertama sebanyak 88.387.352 kasus. Sedangkan banyaknya pasien terkonfirmasi positif di Indonesia hingga 13 Januari 2021, bertambah sebanyak 11.278 kasus. Jumlah kumulatifnya, atau pasien terkonfirmasi positif yang tercatat sejak kasus pertama hingga saat ini, mencapai 858.043 kasus. Angka tersebut diperoleh berdasarkan data yang dipublikasikan oleh Satgas COVID-19 [3]. Dari data yang telah dijelaskan sebelumnya, terlihat bahwa kasus positif COVID-19 secara global terus meningkat. Sehingga, WHO menghimbau kepada seluruh dunia untuk menerapkan beberapa tindakan pencegahan penularan COVID-19 yaitu dengan pembatasan sosial, himbauan untuk sering mencuci tangan dan tidak menyentuh area wajah, mewajibkan masyarakat menggunakan masker, pemeriksaan RT-PCR bagi individu yang diduga terpapar COVID-19, serta karantina mandiri bagi individu yang terinfeksi tanpa gejala.

Beberapa kajian mengenai penyebaran COVID-19 juga telah banyak dilakukan, salah satunya oleh [4], dimana model matematika dilakukan untuk mengontrol penyebaran COVID-19 dengan memodifikasi model SIR yang mempertimbangkan banyaknya kasus individu terinfeksi dan beban spesifik pada individu yang diisolasi di tempat khusus maupun di ICU (intensive care unit). Kemudian, [5] mengkaji tentang Model epidemi SIR (Susceptible, Infected, Recovered) dan menunjukkan bagaimana mengontrol infeksi berdasarkan data kasus COVID-19 di Wuhan, Cina dengan pendekatan statistika. Selanjutnya, [6] juga mengkaji model matematika penyebaran COVID-19 dengan studi kasus di Wuhan, China. Penelitian tersebut mengkonstruksi model matematika dengan mempertimbangkan adanya mutasi virus COVID-19 yang dikenal dengan Super-spreaders individual. Kajian tentang model matematika penyebaran COVID-19 juga dilakukan oleh [7] yaitu dengan menambahkan kelas Isolasi pada model epidemi SEIR. Beberapa penelitian model matematika penyebaran COVID-19 di Indonesia juga dilakukan oleh [1], [8], dan [9]. Model matematika berbasis SIR juga dapat digunakan dalam memprediksi penyebaran COVID-19 di suatu daerah [10]. Selain terhadap manusia, model SIR juga dapat digunakan pada jaringan komputer [11].

Pada penelitian ini, dengan mengembangkan penelitian dari [7], akan dikaji tentang model penyebaran COVID-19 dengan memodifikasi model matematika SEIR yaitu menambahkan kelas isolated yaitu karantina mandiri dan kelas Hospitalized yaitu penanganan kesehatan bagi individu terinfeksi COVID-19. Selanjutnya akan ditentukan bilangan reproduksi dasar, titik-titik ekuilibrium beserta kestabilannya kemudian dilakukan simulasi numerik untuk menggambarkan perilaku dari model yang diperoleh. Agar diperoleh hasil yang dekat dengan kejadian nyata, simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan data kasus COVID-19 di DI Yogyakarta dari tanggal 13 Agustus hingga 31 Desember 2020 [13]. Selanjutnya, dilakukan juga analisa sensitivitas pada bilangan reproduksi dasar untuk mengetahui parameter yang berpengaruh terhadap penyebaran COVID-19.

2. Pemodelan Matematika COVID-19 dengan Karantina

Penelitian ini membahas Penyebaran COVID-19 di dalam sebuah populasi terbuka, dengan kata lain ada individu yang masuk ke dalam populasi dan keluar dari populasi yang akan dibahas. Selanjutnya, populasi yang dibahas di dalam penelitian ini mempunyai tingkat kelahiran dan kematian alami yang berbeda. Populasi terbagi dalam enam kelas, dengan penjelasan sebagai berikut

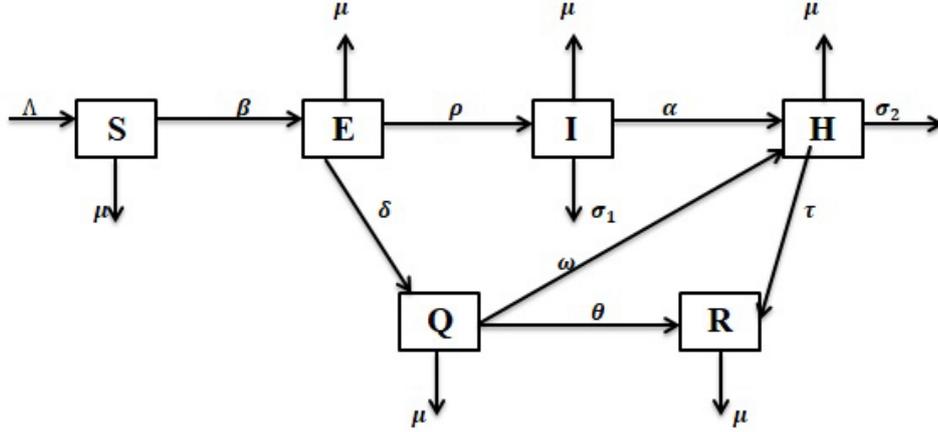
- (1) Kelas rentan merupakan subpopulasi individu yang tidak terinfeksi tapi dapat terinfeksi COVID-19.
- (2) Kelas exposed merupakan subpopulasi individu yang diduga terpapar COVID19.
- (3) Kelas terinfeksi merupakan subpopulasi individu yang terinfeksi COVID-19 disertai gejala.
- (4) Kelas isolated merupakan subpopulasi individu yang melakukan karantina mandiri.
- (5) Kelas hospitalized merupakan subpopulasi individu yang sudah terinfeksi COVID19 dan dirawat di rumah sakit.
- (6) Kelas recovered merupakan subpopulasi individu yang sembuh dari COVID-19.

Selanjutnya, diberikan asumsi-asumsi dalam pembentukan model, yaitu

- (1) Populasi yang dibahas dalam penelitian ini merupakan populasi terbuka, sehingga jumlah total individu yang ada dalam populasi tidak konstan.
- (2) Perilaku individu di masing-masing kompartemen punya pola dan pergerakan yang seragam. Seragam atau homogen yang dimaksud adalah masyarakat memiliki tingkat kedisiplinan dan respon yang sama atau hampir sama terhadap wabah COVID-19.
- (3) Penyakit dapat menyebabkan kematian, sehingga kelas populasi yang berkurang disebabkan kematian karena penyakit yaitu kelas infected dan kelas hospitalized.
- (4) Penyakit dapat menular melalui kontak langsung dengan individu dalam kelas infected dan kelas exposed.
- (5) Individu dalam kelas exposed adalah individu yang diduga terinfeksi COVID19 dan sedang melakukan pemeriksaan. Jika pada hasil pemeriksaan dinyatakan positif walau tanpa gejala, maka individu tersebut melakukan karantina mandiri. Jika menunjukkan gejala dan hasil pemeriksaan positif maka individu tersebut dikarantina di suatu tempat yang telah disediakan oleh pemerintah setempat.

- (6) Individu terinfeksi dalam kelas infected, dimungkinkan masih melakukan kontak dengan individu rentan sebelum dinyatakan positif, sehingga penyakit dapat menular dari kelas ini.

Berikut diberikan diagram alir dalam pembentukan model, yaitu



GAMBAR 1. Diagram Alir Penyebaran Virus Corona (COVID-19) Dengan Karantina

Berdasarkan Gambar 1 sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{dS(t)}{dt} &= \Lambda - \beta S(t)(E(t) + I(t)) - \mu S(t) \\
 \frac{dE(t)}{dt} &= \beta S(t)(E(t) + I(t)) - \mu E(t) - \rho E(t) - \delta E(t) \\
 \frac{dQ(t)}{dt} &= \delta E(t) - \mu Q(t) - \omega Q(t) - \theta Q(t) \\
 \frac{dI(t)}{dt} &= \rho E(t) - \mu I(t) - \sigma_1 I(t) - \alpha I(t) \\
 \frac{dH(t)}{dt} &= \alpha I(t) + \omega Q(t) - \mu H(t) - \sigma_2 H(t) - \tau H(t) \\
 \frac{dR(t)}{dt} &= \theta Q(t) + \tau H(t) - \mu R(t)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

dengan $N(t) = S(t) + E(t) + Q(t) + I(t) + H(t) + R(t)$.

Selanjutnya, pada Sistem (2.1), variabel $R(t)$ tidak muncul pada persamaan lain. Hal ini menunjukkan bahwa jumlah individu pada kompartemen $R(t)$ tidak mempengaruhi laju perubahan jumlah individu pada kompartemen yang lain, maka Persamaan $R(t)$ untuk sementara dapat diabaikan dari sistem. Sehingga Sistem (2.1) dapat ditulis

$$\begin{aligned}
 \frac{dS(t)}{dt} &= \Lambda - \beta S(t)(E(t) + I(t)) - \mu S(t) \\
 \frac{dE(t)}{dt} &= \beta S(t)(E(t) + I(t)) - \mu E(t) - \rho E(t) - \delta E(t) \\
 \frac{dQ(t)}{dt} &= \delta E(t) - \mu Q(t) - \omega Q(t) - \theta Q(t) \\
 \frac{dI(t)}{dt} &= \rho E(t) - \mu I(t) - \sigma_1 I(t) - \alpha I(t) \\
 \frac{dH(t)}{dt} &= \alpha I(t) + \omega Q(t) - \mu H(t) - \sigma_2 H(t) - \tau H(t).
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Penjelasan parameter yang digunakan pada Sistem (2.1) disajikan pada Tabel (1) berikut

Parameter	Deskripsi
Λ	Laju rekrutmen
β	Tingkat infeksi baru
μ	Tingkat kematian alami
δ	Tingkat individu yang melakukan karantina mandiri
ρ	Tingkat perkembangan penyakit kelas exposed
θ	Tingkat perpindahan individu dari kelas isolated ke recovered
τ	Tingkat kesembuhan individu
σ_1	Tingkat kematian karena penyakit kelas terinfeksi
σ_2	Tingkat kematian karena penyakit kelas hospitalized
α	Tingkat perkembangan penyakit kelas infected
ω	Tingkat perkembangan penyakit kelas isolated

TABEL 1. Parameter dan Deskripsi

dengan $0 < \beta, \mu, \delta, \rho, \theta, \tau, \sigma_1, \sigma_2, \alpha, \omega \leq 1$ dan $\Lambda \geq 1$.

2.1. Analisa Model. Pada bagian ini, akan dianalisa dinamik model matematika penyebaran COVID-19 yang sudah diperoleh pada bagian 1. Langkah awal untuk menganalisa Sistem (2.1) adalah menjamin bahwa sistem mempunyai penyelesaian non-negatif.

2.1.1. Penyelesaian Nonnegatif.

Lemma 2.1. *Jika diberikan nilai awal*

$$\begin{cases} S(t_0) = S_0, E(t_0) = E_0, Q(t_0) = Q_0 \\ I(t_0) = I_0, H(t_0) = H_0, R(t_0) = R_0 \end{cases}$$

maka nilai dari $S(t), E(t), Q(t), I(t), H(t), R(t) \geq 0$.

Bukti. Untuk membuktikan Lema 2.3, digunakan kontradiksi, sehingga diasumsikan terdapat nilai awal t_r sedemikian hingga $S(t_r) = 0, S'(t_r) \leq 0$, dan $S(t) > 0, E(t) > 0, Q(t) > 0, I(t) > 0, H(t) > 0, R(t) > 0$ untuk $0 < t < t_r$ atau terdapat t_m sedemikian hingga $E(t_m) = 0, E'(t_m) \leq 0$, dan $S(t) > 0, E(t) > 0, Q(t) > 0, I(t) > 0, H(t) > 0, R(t) > 0$ untuk $0 < t < t_m$. Diperoleh persamaan pertama pada Sistem (2.1) yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dS(t_r)}{dt} &= \Lambda - \beta S(t_r)(E(t_r) + I(t_r)) - \mu S(t_r) \\ &= \Lambda > 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

kontradiksi dengan $S'(t_r) \leq 0$. Selanjutnya, diperhatikan persamaan kedua pada Sistem (2.1), diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dE(t_m)}{dt} &= \beta S(t_m)(E(t_m) + I(t_m)) - (\mu + \rho + \delta)E(t_m) \\ &= \beta S(t_m)I(t_m) \geq 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Pertidaksamaan (2.4) akan terpenuhi jika $I(t_m) \geq 0$ dan $S(t_m) = 0$, sehingga diperoleh bahwa $E(t) \geq 0$ untuk setiap t (kontradiksi dengan $E'(t_m) \leq 0$). Akibatnya, $S(t)$ dan $E(t)$ positif untuk setiap t . Analog dengan hal tersebut, diperoleh untuk variabel lainnya, yaitu $Q(t), H(t), I(t)$, dan $R(t)$ positif untuk $t > 0$. Dengan kata lain, diperoleh solusi dari Sistem (2.1) positif untuk setiap $t > 0$. \square

Selanjutnya, eksistensi penyelesaian terbatas dari Sistem (2.1) akan dijelaskan berikut.

2.1.2. Penyelesaian Terbatas.

Lemma 2.2. *Semua penyelesaian dari Sistem (2.1) berada di \mathbb{R}_+^6 dan akan berada di himpunan A dengan*

$$A = \left\{ (S, E, Q, I, H, R) \in \mathbb{R}_+^6 : N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$$

Bukti. Banyaknya populasi ($N(t)$) merupakan jumlahan kelas rentan, exposed, isolated, terinfeksi, hospitalized, dan kelas recovered. Apabila dituliskan dalam kalimat matematika, maka

$$N(t) = S(t) + E(t) + Q(t) + I(t) + H(t) + R(t). \quad (2.5)$$

dengan $N(t)$ merupakan jumlah total populasi dari masing-masing kelas. Apabila Persamaan (2.5) dicari turunan pertama terhadap t , maka didapatkan

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= \Lambda - \mu N(t) - \sigma_1 I(t) - \sigma_2 H(t) \\ &\leq \Lambda - \mu N(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Penyelesaian untuk Persamaan (2.6) adalah

$$N(t) \leq C e^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu} \quad (2.7)$$

Apabila disubstitusikan nilai awal $N(0) = N_0$, maka Persamaan (2.7) menjadi

$$N(t) \leq N_0 e^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}). \quad (2.8)$$

Apabila diambil nilai $t \rightarrow +\infty$, maka Persamaan (2.8) menjadi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \frac{\Lambda}{\mu} \quad (2.9)$$

Selanjutnya, diperoleh dari Persamaan (2.9) $N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$, untuk setiap $t \geq 0$. Artinya, banyaknya populasi dalam waktu yang panjang akan menuju kapasitas batasnya, yakni $\frac{\Lambda}{\mu}$. Jadi, penyelesaian dari Sistem (2.1) dapat didefinisikan dalam daerah invariant positif A dengan

$$A = \left\{ (S, E, Q, I, H, R) \in \mathbb{R}_+^6 : N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$$

□

3. Analisa Kestabilan Model Matematika Penyebaran COVID-19 Dengan Karantina

Pada bagian ini, akan dicari bilangan reproduksi dasar, titik ekuilibrium beserta kestabilannya. Pada penelitian ini, diperoleh dua titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik dan dilanjutkan dengan kestabilan lokal dari kedua titik ekuilibrium. Selanjutnya, bilangan reproduksi dasar dan kestabilan global titik ekuilibrium bebas penyakit akan dicari dengan menggunakan metode Next Generation Matrix.

3.1. Bilangan Reproduksi Dasar. Selanjutnya, menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0) dari Sistem (2.2) dengan mencari nilai eigen maksimum yang diperoleh dari next generation matriks dengan mengambil persamaan-persamaan yang menggambarkan kasus infeksi baru dan perubahan kompartemen infeksi dari sistem. Pada Sistem (2.2), kelas yang terinfeksi adalah kelas $E(t)$ dan $I(t)$. Sedangkan kelas yang tidak terinfeksi adalah kelas $S(t)$, $Q(t)$, dan $H(t)$. Lebih lanjut, dapat ditulis sebagai berikut

$$x = \begin{pmatrix} E(t) \\ I(t) \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} S(t) \\ Q(t) \\ H(t) \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, akan ditentukan matriks F dan matriks V , sehingga diperoleh

$$F = \begin{pmatrix} \beta \frac{\Lambda}{\mu} & \beta \frac{\Lambda}{\mu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

dan

$$V = \begin{pmatrix} (\mu + \rho + \delta) & 0 \\ -\rho & (\mu + \sigma_1 + \alpha) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Diperoleh

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta\Lambda}{\mu p_1} & \frac{\beta\Lambda}{\rho\beta\Lambda} \\ \frac{\mu p_1}{\rho\beta\Lambda} & \frac{\mu p_1}{\rho\beta\Lambda} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Sehingga, bilangan reproduksi dasar dari Sistem (2.2) adalah

$$R_0 = \frac{\beta\Lambda(\mu + \sigma_1 + \alpha + \rho)}{\mu(\mu + \rho + \delta)(\mu + \sigma_1 + \alpha)}. \quad (3.4)$$

3.2. Titik Ekuilibrium. Misalkan \bar{S} , \bar{E} , \bar{Q} , \bar{I} dan \bar{H} menyatakan titik-titik ekuilibrium dari Sistem (2.2). Jika bagian kanan dari Persamaan (2.1) sama dengan 0 dan $I(t) = 0$, maka akan diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit, yaitu

$$E_0 = (\bar{S}, \bar{E}, \bar{Q}, \bar{I}, \bar{H}) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0 \right) \quad (3.5)$$

Selanjutnya, untuk titik ekuilibrium endemik dijelaskan pada Lema berikut

Lemma 3.1. *Jika diberikan Sistem (2.2), $I(t) > 0$ dan $R_0 > 1$, maka titik ekuilibrium endemik penyakit adalah*

$$E_1 = (\bar{S}, \bar{E}, \bar{Q}, \bar{I}, \bar{H})$$

dengan

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \frac{\Lambda}{\mu + \beta(a_1 + 1)\bar{I}} \\ \bar{E} &= a_1\bar{I} \\ \bar{Q} &= a_1a_2\bar{I} \\ \bar{I} &= \frac{a_4\Lambda - a_3\mu}{a_3a_4} \\ \bar{H} &= \left(\frac{\alpha + \omega a_1 a_2}{\mu + \sigma_2 + \tau} \right) \bar{I}. \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(\mu + \sigma_1 + \alpha)}{\rho} \\ a_2 &= \frac{\delta}{(\mu + \omega + \theta)} \\ a_3 &= (\mu + \rho + \delta)a_1 \\ a_4 &= \beta(a_1 + 1). \end{aligned}$$

Berikutnya, akan diberikan teorema terkait kestabilan dari titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik.

Teorema 3.2. *Jika Sistem (2.2) dan nilai $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit pada Sistem (2.2) akan stabil asimtotik lokal ketika*

$$\begin{aligned} b_1 &> 0 \\ c_1 &= \frac{b_1 b_2 - b_3}{b_1} > 0 \\ d_1 &= b_3 > 0 \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} b_1 &= p_1 + p_2 + p_3 - \frac{\beta\Lambda}{\mu} \\ b_2 &= p_2 p_3 + p_1 p_3 + p_1 p_2 - \frac{\beta\Lambda}{\mu} p_3 - \frac{\beta\Lambda}{\mu} p_2 - \frac{\beta\Lambda}{\mu} \rho \\ b_3 &= p_1 p_2 p_3 - \frac{\beta\Lambda}{\mu} p_2 p_3 - \frac{\beta\Lambda}{\mu} p_2 \rho. \end{aligned}$$

Teorema berikut menjelaskan terkait kestabilan lokal titik ekuilibrium endemik.

Teorema 3.3. *Jika diberikan Sistem (2.2) dan nilai $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium endemik pada Sistem (2.2) stabil asimtotik lokal ketika dengan*

$$\begin{aligned} q_1 &> 0 \\ r_1 &= \frac{q_1 q_2 - q_3}{q_1} > 0 \\ r_3 &= \frac{q_3 r_1 - q_1 r_2}{r_2} > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1 &= p_2 - c_3 + p_3 + c_1 \\ q_2 &= p_2 p_3 - c_3 p_2 - c_3 p_3 - \beta \bar{S} \rho + p_2 c_1 - c_3 c_1 + c_1 p_3 + \beta \bar{S} c_2 \\ q_3 &= \beta \bar{S} \rho p_2 - p_3 c_3 p_2 - c_1 c_3 p_2 + c_1 p_3 p_2 - c_1 c_3 p_3 - c_1 \beta \bar{S} \rho + \beta \bar{S} c_2 p_2 + \beta \bar{S} c_2 p_3 \\ &\quad + \beta \bar{S} c_2 \rho \\ q_4 &= c_1 p_3 c_3 p_2 - c_1 \beta \bar{S} p_2 \rho + \beta \bar{S} c_2 p_2 p_3 + \beta \bar{S} c_2 p_2 \rho. \end{aligned}$$

Teorema berikut menjelaskan terkait kestabilan global dari titik ekuilibrium bebas penyakit.

Teorema 3.4. *Diberikan titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (\bar{S}, \bar{E}, \bar{Q}, \bar{I}, \bar{H}) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right)$ dan $R_0 = \frac{\beta\Lambda(\mu+\sigma_1+\alpha+\rho)}{\mu(\mu+\rho+\delta)(\mu+\sigma_1+\alpha)}$. Jika $S(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$, maka titik ekuilibrium bebas penyakit E_0 stabil asimtotik global.*

4. Simulasi Numerik

Pada bagian ini akan disajikan simulasi penyebaran COVID-19 secara numerik terhadap Sistem (2.1). Simulasi dilakukan dengan menggunakan metode Runge-Kutta. Hal ini dilakukan untuk melihat perilaku solusi Sistem (2.1) di sekitar titik ekuilibrium secara numerik yang telah diperoleh secara analitik pada bab sebelumnya.

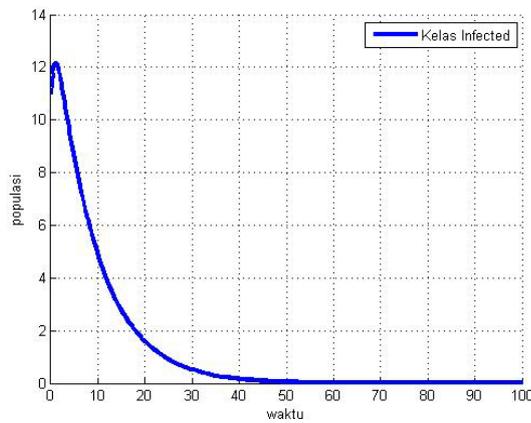
Pada penelitian ini, simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan data kasus infeksi COVID-19 di DI Yogyakarta. Data diambil dari tanggal 13 Agustus sampai 31 Desember 2020. Berdasarkan data Bappenas, [12], total populasi penduduk di DIY tahun 2020 adalah 3.882.288. Sedangkan jumlah kematian di DIY pada tahun 2020 adalah 322.000 .

Berdasarkan data nasional BNPB [13], jumlah kasus kematian akibat COVID-19 sejak kasus pertama sampai 31 Desember adalah 260. Sedangkan jumlah kasus sembuh dari COVID-19 adalah 8.175. Selanjutnya, nilai-nilai parameter disajikan pada Tabel 2.

Parameter	Nilai	Satuan	Keterangan
Λ	100	$\frac{\text{individu}}{\text{hari}}$	Asumsi
β	0,00000033	$\frac{\text{individu} \times \text{hari}}{\text{individu}}$	Asumsi
μ	0,00023	$\frac{\text{individu}}{\text{hari}}$	[12]
δ	0,2	$\frac{\text{hari}}{\text{hari}}$	Asumsi
ρ	0,001	$\frac{\text{individu}}{\text{hari}}$	Asumsi
θ	0,0337	$\frac{\text{hari}}{\text{hari}}$	Asumsi
τ	0,00184	$\frac{\text{hari}}{\text{hari}}$	[13]
σ_1	0,000058	$\frac{\text{individu}}{\text{hari}}$	[13]
σ_2	0,0068	$\frac{\text{hari}}{\text{hari}}$	Asumsi
α	0,125	$\frac{\text{hari}}{\text{hari}}$	Asumsi
ω	0,5	$\frac{\text{hari}}{\text{hari}}$	Asumsi

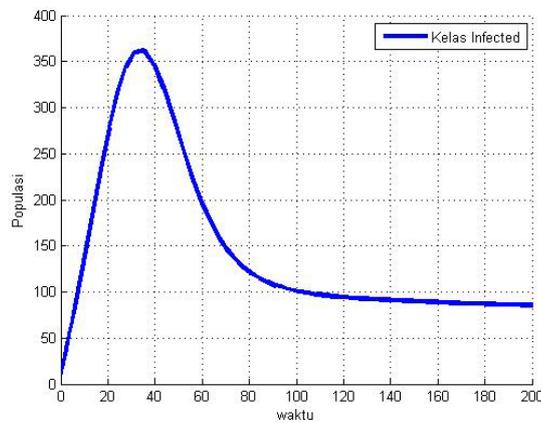
TABEL 2. Nilai-nilai Parameter Sistem (2.1)

Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 2, sehingga diperoleh nilai $R_0 = 0,7369 < 1$. Artinya, potensi penularan COVID-19 tidak ada. Selanjutnya, banyaknya kasus aktif, sembuh, dan kasus baru COVID-19 berdasarkan data pada tanggal 13 Agustus adalah berturut-turut 239, 646, dan 11. Sedangkan untuk data banyaknya individu exposed dan isolated diasumsikan sama dengan banyaknya individu pada kelas infected. Simulasi numerik kelas terinfeksi untuk $R_0 < 1$ dengan menggunakan nilai awal $S(0) = 100.000$, $E(0) = 11$, $Q(0) = 11$, $I(0) = 11$, $H(0) = 239$, dan $R(0) = 646$, disajikan pada Gambar 2.



GAMBAR 2. Kurva penyelesaian dari Kompartemen infected untuk $R_0 < 1$

Selanjutnya, dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 2 dengan mengubah nilai $\beta = 0,000001$ dan $\rho = 0,1$ maka diperoleh bilangan reproduksi dasar adalah $R_0 = 2,60403 > 1$. Artinya, 1 orang yang terinfeksi COVID-19 akan menularkan ke 2 atau 3 individu rentan lain, dan 1 dari 2 atau 3 individu tersebut akan menularkan ke 2 atau 3 individu rentan lainnya, begitu seterusnya. Lebih lanjut, apabila disimulasikan secara numerik, maka kurva penyelesaian kelas terinfeksi disajikan pada Gambar 3



GAMBAR 3. Kurva penyelesaian dari Kompartemen infected untuk $R_0 > 1$

Diperhatikan untuk Gambar 2, terlihat bahwa dengan nilai awal yang diberikan, banyaknya individu seiring berjalannya waktu akan menuju ke 0. Hal ini berarti seiring berjalannya waktu banyaknya individu akan menuju ke titik ekuilibriumnya. Begitu juga pada Gambar 3, dengan menggunakan nilai awal yang sama dengan sebelumnya, diperoleh bahwa banyaknya individu akan naik pada hari ke 30 kemudian turun dan stabil di titik 85.

4.1. Analisis Sensitivitas Bilangan Reproduksi Dasar. Pada bagian ini akan dilakukan analisis sensitivitas untuk model penyebaran COVID-19 dengan karantina. Analisis sensitivitas pada bilangan reproduksi dasar dilakukan untuk mengetahui parameter mana yang paling berpengaruh dalam penyebaran COVID-19. Terdapat 7 parameter yang akan diwakili oleh γ . Didefinisikan sensitivitas untuk γ adalah sebagai berikut

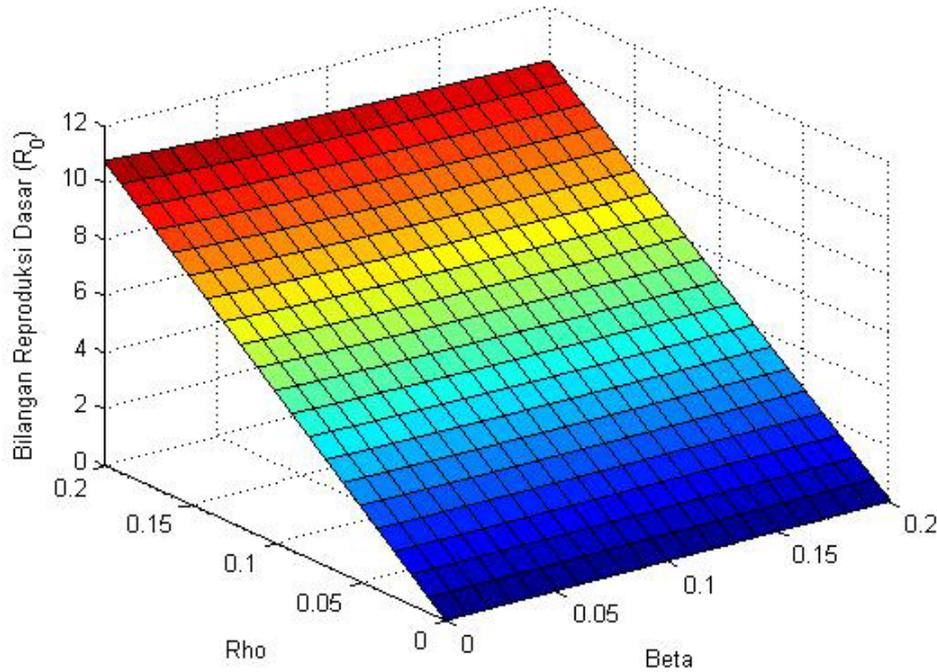
$$S_\gamma = \frac{\gamma}{R_0} \cdot \frac{\partial R_0}{\partial \gamma} \quad (4.1)$$

Nilai dari 7 parameter tersebut akan ditentukan dengan menggunakan Persamaan (4.1), sehingga akan diperoleh nilai dari setiap parameter ketika $R_0 < 1$ dan $R_0 > 1$. Sedangkan nilai parameter yang digunakan berdasarkan Tabel 2, sehingga diperoleh hasil sensitivitas dari setiap parameter sebagai berikut

Sensitivitas dari setiap parameter	Nilai Sensitivitas	
	$R_0 > 1$	$R_0 < 1$
Λ	1	1
β	1	1
μ	-0,0472039	-0,000012034
ρ	0,0385922	-1,6951543
δ	-0,00226968	-0,002012694
σ_1	-0,00110065	$-7,0761941 \cdot 10^{-8}$
α	0,88770046	0,12299790

TABEL 3. Hasil analisis sensitivitas dari setiap parameter ketika $R_0 < 1$ dan $R_0 > 1$

Berdasarkan Tabel 3, terlihat bahwa parameter yang berpengaruh terhadap penyebaran COVID-19 ketika $R_0 < 1$ adalah Λ , β , dan α . Jika parameter-parameter tersebut diperbesar nilainya, maka nilai R_0 yang dihasilkan juga akan semakin besar. Sedangkan jika parameter ρ , μ , δ , dan σ_1 diperbesar maka nilai R_0 yang dihasilkan akan semakin kecil. Selanjutnya ketika $R_0 > 1$, parameter yang berpengaruh positif terhadap penyebaran COVID-19 adalah Λ , β , ρ dan α . Jika parameter-parameter tersebut diperkecil nilainya, maka akan mengurangi nilai R_0 . Dari kedua nilai sensitivitas R_0 , diperoleh bahwa tingkat interaksi antara individu rentan dengan individu terinfeksi yang memiliki pengaruh positif terbesar pada penyebaran COVID-19. Sehingga dengan mengurangi tingkat interaksi antara individu rentan dengan individu terinfeksi dapat mengurangi penyebaran COVID-19. Selanjutnya, diperhatikan hubungan parameter β dan ρ terhadap bilangan reproduksi dasar sebagai berikut



GAMBAR 4. Grafik Nilai β vs ρ

Berdasarkan Gambar (4), dapat dilihat jika dipilih nilai $\beta = 0.01$ dan nilai $\rho = 0.01$, maka diperoleh nilai $R_0 = 0.536$ ($R_0 < 1$). Kemudian jika dipilih nilai $\beta = 0.02$ dan nilai $\rho = 0.02$ maka diperoleh nilai $R_0 = 1.072$ ($R_0 > 1$). Hal ini berarti, semakin besar tingkat infeksi dan tingkat perkembangan penyakit dari kelas exposed akan mempengaruhi penyebaran COVID-19. Sehingga, dengan mengurangi kedua nilai parameter tersebut, maka akan mengurangi penyebaran dari COVID-19.

5. PENUTUP

Berdasarkan hasil studi literatur tentang beberapa asumsi yang telah dijelaskan pada Bagian 3, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut. Model matematika penyebaran COVID-19 dengan karantina disajikan dalam Sistem (2.1), dan bilangan reproduksi dasar, yaitu Persamaan (3.4). Berikutnya, berdasarkan analisa sensitivitas pada bilangan reproduksi dasar pada Bagian 4, diperoleh beberapa parameter yang digunakan sebagai indikator untuk menyelidiki penyebaran COVID-19. Parameterparameter tersebut merupakan parameter yang dapat dikendalikan nilainya sesuai dengan interpretasi biologis. Parameter-parameter tersebut adalah tingkat interaksi antara individu rentan dengan individu terinfeksi (β), tingkat perpindahan individu kelas *ex* posed menjadi

individu terinfeksi (ρ), dan tingkat perpindahan individu kelas infected ke kelas hospitalized (α).

Jika pada suatu populasi yang telah terjangkit COVID-19, maka salah satu langkah untuk mengurangi penyebaran COVID-19 adalah dengan mengendalikan parameter-parameter yang telah disebutkan sebelumnya. Berdasarkan hasil simulasi pada bagian 4, diperoleh bahwa dengan memperkecil nilai dari tingkat interaksi individu rentan dengan individu terinfeksi (β), maka nilai bilangan reproduksi dasar akan cenderung kurang dari satu. Hal tersebut berarti, COVID-19 akan menghilang dari populasi.

Referensi

- [1] Dipo Aldila, dkk., A Mathematical Study on the Spread of COVID-19 Considering Social Distancing and Rapid Assesment : The Case of Jakarta, Indonesia, Elsevier : Chaos, Solitons, and Fractals (139) (2020), 110042.
- [2] WHO., <https://covid19.who.int>. (2020).
- [3] Satgas Covid-19., <https://covid19.go.id>. (2020).
- [4] W. Ming, J.V. Huang, dan C.J.P. Zhang., Breaking down of the healthcare system : mathematical modelling for controlling the novel coronavirus (2019-CoV) outbreak in Wuhan, China, medRxiv and bioRxiv (2020).
- [5] I. Nesteruk., Statistics-based predictions of coronavirus epidemic spreading in Mainland China, Innovative Biosystem and Bioengineering (2020), Vol. 4, no. 1, pp. 13-18.
- [6] Faical Ndairou, Ivan Area, Juan J. Nieto, dan Delfim F.M. Torres, Mathematical Modelling of COVID-19 Transmisson Dynamics With a Case Study of Wuhan, Elsevier : Chaos, Solitons, and Fractals (135) (2020), 109846.
- [7] Anwar Zeb, Ebraheem Alzahrani, Vedat Suat E., dan Gul Zaman, Mathematical Model for Coronavirus Disease 2019 (COVID-19) Containing Isolation Class, Hindawi : Biomed Research International (2020), 3452402, Vol. 7.
- [8] Suwardi Annas, dkk., Stability Analysis and Numerical Simulation of SEIR Model for Pandemic COVID-19 Spread In Indonesia, Elsevier : Chaos, Solitons, and Fractals (139) (2020), 110072.
- [9] Novy Reandy.S., Muhammad Ikhwan, Suyanto Suyanto, dan Virasakdi Chongsuvivatwong., Optimal Control on a Mathematical Model to Pattern the Progression of Coronavirus Disease 2019 (COVID-19) in Indonesia, Global Health Research and Policy. (2020), Vol. 1-12.
- [10] Fajar Adi. K., Nanang. S., Irwan. E., Andreasta. M., Model Berbasis SIR Dalam Prediksi Awal Penyebaran COVID-19 Di Daerah Istimewa Yogyakarta (DIY), Jurnal Matematika Thales (JMT) (2020), Vol. 02-01.
- [11] Ahmadi dan Widodo., Local Stability of Malware Propagation Model on Network Computer with Two Time Delay, AIP Conference Proceedings (2020).
- [12] Bappenas., <https://bappenas.go.id>.
- [13] Bnpb., <https://bnpb-inacovid19.hub.arcgis.com>

ISMIA TUL KHUSNA* (Penulis Korespondensi)

Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia.

ismiatulkhusna@mail.ugm.ac.id

LINA ARYATI

Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia.

lina@ugm.ac.id