Jurnal Matematika Thales (JMT): 2022 ISSN: 2715-1891
Vol. 04 No. 02

# SOLVABILITAS PERSAMAAN MATRIKS INTERVAL ATAS ALJABAR MAX-PLUS (SOLVABILITY OF INTERVAL MAX-PLUS MATRIX EQUATIONS)

MIRA WADU*, ARI SUPARWANTO

**Abstract.** Max-plus algebra is an algebraic structure formed from the set $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup (-\infty)$, equipped with the maximum $\oplus$ and addition $\otimes$ operations. This paper discusses the interval max-plus matrix equations of the form $\mathbf{A} \otimes X \otimes \mathbf{C} = \mathbf{B}$ where $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ are given matrices of suitable sizes and X is an unknown matrix. Because not all given systems of linear equations is solvable, three types of universal solvability are defined in this paper, namely the strong universal solvability, universal solvability and weak universal solvability. The results of the study are obtained the necessary and sufficient conditions for the three types of universal solvability and the relationship between the three types of solvability.
*Keywords*: Max-plus algebra, interval matrix equation, universal solvability

**Abstrak.** Aljabar max-plus adalah struktur aljabar yang dibentuk dari himpunan $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup (-\infty)$ dan dilengkapi dengan operasi maksimum $\oplus$ dan penjumlahan $\otimes$. Pada tulisan ini dibahas mengenai sistem persamaan matriks interval dengan bentuk $\mathbf{A} \otimes X \otimes \mathbf{C} = \mathbf{B}$ dengan $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ adalah matriks interval dengan ukuran yang bersesuaian dan X adalah matriks yang tidak diketahui. Karena tidak semua sistem persamaan linear dapat diselesaikan, didefinisikan tiga jenis solvabilitas universal dari persamaan matriks interval max-plus, yaitu solvabilitas universal kuat, solvablitas universal dan solvabilitas universal lemah. Dari hasil penelitian diperoleh syarat perlu dan cukup dalam menetukan ketiga jenis solvabilitas universal tersebut dan adanya hubungan antara ketiga jenis solvabilitas tersebut.
*Kata-kata kunci*: Aljabar max-plus, persamaan matriks interval, solvabilitas universal.

## 1. PENDAHULUAN

Beberapa permasalahan pada sistem transportasi, manufaktur maupun telekomunikasi dapat dijelaskan dalam sistem event diskrit. Dalam sistem event diskrit, komponen berpindah dari peristiwa yang satu ke peristiwa yang lainnya secara berubah-ubah dengan waktu peristiwa yang belum diketahui. Untuk mendeskripsikan sistem dinamik ini dapat digunakan pendekatan aljabar max-plus.

Aljabar max-plus adalah struktur aljabar yang dibentuk dari himpunan $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup (-\infty)$ yang dilengkapi dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ dengan ketentuan untuk setiap $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ berlaku $a \oplus b = \max\{a, b\}$ dan $a \otimes b = a + b$. Aljabar max-plus merupakan semifield yang idempoten, yang selanjutnya cukup dituliskan dengan $\overline{\mathbb{R}}$.

Dalam aljabar max-plus, dikenal sistem persamaan linear max-plus yang merupakan salah satu alat untuk memodelkan masalah real dengan pendekatan aljabar max-plus. Dalam memodelkan masalah real tersebut terkadang waktu aktivitasnya tidak diketahui secara pasti. Analisis interval dapat digunakan untuk menyelidiki ketidakpastian ini dan kemudian diperluas ke sistem max-plus interval. Dalam generalisasi ke sistem max-plus interval ini terdapat matriks interval atas aljabar max-plus.

Dalam dua dekade terakhir, sistem interval berbentuk $\mathbf{A} \otimes x = \mathbf{b}$ telah dipelajari, diantaranya [3],[7], [4]. Selanjutnya, penelitian ilmiah dilakukan mengenai sistem persamaan matriks interval $\mathbf{A} \otimes X \otimes \mathbf{C} = \mathbf{B}$ dengan $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ adalah matriks interval dengan ukuran yang bersesuaian dan X adalah matriks yang tidak diketahui [5].

Dalam memodelkan permasalahan real terkadang sistem yang diperoleh tidak dapat diselesaikan. Kemudian, didefinisikan tiga jenis solvabilitas, yaitu solvabilitas universal kuat, solvabilitas universal dan solvabilitas universal lemah [6]. Berdasarkan definisi tersebut, pada penelitian ini dibahas terkait syarat perlu dan cukup dalam menentukan solvabilitas universal dari suatu sistem persamaan matriks interval atas aljabar max-plus $\mathbf{A} \otimes X \otimes \mathbf{C} = \mathbf{B}$ dan penerapannya dalam masalah real.

## 2. Persamaan Matriks atas Aljabar Max-plus

Diberikan matriks $A = (a_{ij}) \in \overline{\mathbb{R}}(m, n)$ dan $B = (b_{kl}) \in \overline{\mathbb{R}}(r, s)$. *Tensor product* dari matriks $A$ dan $B$ ditulis dengan $A \boxtimes B$ adalah matriks berukuran $mr \times ns$ sebagai berikut

$$A \boxtimes B = \begin{pmatrix} A \otimes b_{11} & A \otimes b_{12} & \dots & A \otimes b_{1s} \\ A \otimes b_{21} & A \otimes b_{22} & \dots & A \otimes b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A \otimes b_{r1} & A \otimes b_{r2} & \dots & A \otimes b_{rs} \end{pmatrix}$$

dengan $[A \otimes b_{lk}]_{ij} = a_{ij} \otimes b_{lk}$. Selanjutnya, diberikan matriks $X \in \overline{\mathbb{R}}(n, s)$. Didefinisikan $vec(X)$ sebagai vektor $(X_1, X_2, \dots, X_s)^\top$, dengan $X_l$ menotasikan kolom ke-$l$ dari matriks $X$, untuk $l \in S = \{1, \dots, s\}$.
Ekuivalensi dari suatu sistem persamaan matriks dan vektornya diberikan dalam teorema berikut.

**Teorema 2.1.** [8] *Diberikan matriks $A, B, C$ dan $X$ dengan ukuran yang bersesuaian serta sistem persamaan matriks*

$$A \otimes X \otimes C = B \tag{2.1}$$

*maka berlaku*

$$vec(B) = (A \boxtimes C^{\top}) \otimes vec(X) \tag{2.2}$$

Kemudian berikut diberikan teorema terkait dengan syarat perlu dan cukup agar suatu sistem persamaan matriks memiliki penyelesaian.

**Teorema 2.2.** *Sistem persamaan matriks $A \otimes X \otimes C = B$ memiliki penyelesaian jika dan hanya jika persamaan $vec(A \otimes X \otimes C) = vec(B)$ memiliki penyelesaian.*

*Bukti.* Diberikan matriks $A \in \overline{\mathbb{R}}(m,n), B \in \overline{\mathbb{R}}(m,r)$ dan $C \in \overline{\mathbb{R}}(s,r)$ serta sistem persamaan matriks max-plus $A \otimes X \otimes C = B$ dengan $X \in \overline{\mathbb{R}}(n,s)$ dan $X_1, X_2, \ldots, X_s$ merupakan vektor kolom dari $X$.

$$\begin{aligned}
A \otimes X \otimes C &= B \\
A \otimes (X_1, \ldots, X_s) \otimes C &= B \\
(A \otimes X_1, \ldots, A \otimes X_s) \otimes \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{s1} & \ldots & c_{sr} \end{pmatrix} &= B \\
\begin{pmatrix} A \otimes X_1 \otimes c_{11} \oplus A \otimes X_2 \otimes c_{21} \oplus \ldots \oplus A \otimes X_n \otimes c_{s1} \\ A \otimes X_1 \otimes c_{12} \oplus A \otimes X_2 \otimes c_{22} \oplus \ldots \oplus A \otimes X_n \otimes c_{s2} \\ \ldots \\ A \otimes X_1 \otimes c_{1r} \oplus A \otimes X_2 \otimes c_{2r} \oplus \ldots \oplus A \otimes X_n \otimes c_{sr} \end{pmatrix}^{\top} &= B \\
\left( \begin{pmatrix} A \otimes c_{11} & A \otimes c_{21} & \ldots & A \otimes c_{s1} \\ A \otimes c_{12} & A \otimes c_{22} & \ldots & A \otimes c_{s2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A \otimes c_{1r} & A \otimes c_{2r} & \ldots & A \otimes c_{sr} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \ldots \\ X_s \end{pmatrix} \right)^{\top} &= \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \ldots \\ B_r \end{pmatrix}^{\top} \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, diperhatikan bahwa persamaan $vec(A \otimes X \otimes C) = vec(B)$ memiliki bentuk

$$\begin{pmatrix} A \otimes c_{11} & A \otimes c_{21} & \ldots & A \otimes c_{s1} \\ A \otimes c_{12} & A \otimes c_{22} & \ldots & A \otimes c_{s2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A \otimes c_{1r} & A \otimes c_{2r} & \ldots & A \otimes c_{sr} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \ldots \\ X_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \ldots \\ B_r \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Berdasarkan bentuk persamaan (2.3) dan (2.4), maka diperoleh sistem persamaan matriks $A \otimes X \otimes C = B$ memiliki penyelesaian jika dan hanya jika persamaan $vec(A \otimes X \otimes C) = vec(B)$ memiliki penyelesaian. □

Akibat dari Teorema 2.1 dan Teorema 2.2 adalah sebagai berikut.

**Akibat 2.3.** [8] *Persamaan matriks $A \otimes X \otimes C = B$ memiliki penyelesaian jika dan hanya jika $X^*$ merupakan penyelesaiannya, dengan*

$$vec(X^*) = X^*(A \boxtimes C^{\top}, vec(B)) \tag{2.5}$$

Berdasarkan Akibat 2.3, diperoleh $X^*$ yang disebut penyelesaian utama dari sistem persamaan matriks $A \otimes X \otimes C = B$ yang kemudian dinotasikan dengan $X^*(A, B, C)$, dengan rumus:

$$x^*_{jl}(A, B, C) = \min_{k \in R} \left\{ x^*_j(A, B_k) - c_{lk} \right\} \tag{2.6}$$

Hubungan antara sistem persamaan matriks dan penyelesaiannya diberikan dalam teorema berikut.

**Teorema 2.4.** [6] *Diberikan* $A \in \overline{\mathbb{R}}(m, n), B \in \overline{\mathbb{R}}(m, r)$ *dan* $C \in \overline{\mathbb{R}}(m, n)$

(1) *Jika* $A \otimes X \otimes C = B$ *untuk* $X \in \overline{\mathbb{R}}(n, s)$ *maka* $X \leq X^*(A, B, C)$*;*
(2) $A \otimes X^*(A, B, C) \otimes C \leq B$*;*
(3) *Persamaan matriks* $A \otimes X \otimes C = B$ *mempunyai penyelesaian jika dan hanya jika matriks* $X^*(A, B, C)$ *adalah penyelesaiannya.*

Hubungan antara sistem ketaksamaan matriks dan penyelesaiannya diberikan dalam lema berikut.

**Lemma 2.5.** [6] *Diberikan matriks* $A, A^{(1)}, A^{(2)} \in \overline{\mathbb{R}}(m, n), B, B^{(1)}, \quad B^{(2)} \in \overline{\mathbb{R}}(m, r)$ *dan* $C, C^{(1)}, C^{(2)} \in \overline{\mathbb{R}}(s, r)$, *maka pernyataan berikut terpenuhi*

(1) *Jika* $A^{(2)} \leq A^{(1)}$ *maka* $X^*(A^{(1)}, B, C) \leq X^*(A^{(2)}, B, C)$.
(2) *Jika* $B^{(1)} \leq B^{(2)}$ *maka* $X^*(A, B^{(1)}, C) \leq X^*(A, B^{(2)}, C)$.
(3) *Jika* $C^{(2)} \leq C^{(2)}$ *maka* $X^*(A, B, C^{(1)}) \leq X^*(A, B, C^{(2)})$.

## 3. Persamaan Matriks Interval Max-plus

Suatu matriks interval $\mathbf{A}$ merupakan suatu matriks yang unsur-unsurnya berupa interval tertutup. Suatu matriks interval $\mathbf{A}$ dapat ditulis:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \dots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \dots & \boldsymbol{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a}_{m1} & \boldsymbol{a}_{m2} & \dots & \mathbf{a}_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}] & \dots & [\underline{a}_{1n}, \overline{a}_{1n}] \\ [\underline{a}_{12}, \overline{a}_{12}] & \dots & [\underline{a}_{1n}, \overline{a}_{1n}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [\underline{a}_{m1}, \overline{a}_{m1}] & \dots & [\underline{a}_{mn}, \overline{a}_{mn}] \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Didefinisikan $\underline{A} = (\underline{a}_{ij}) \in \overline{\mathbb{R}}(m, n)$ dan $\overline{A} = (\overline{a}_{ij}) \in \overline{\mathbb{R}}(m, n)$ yang berturut-turut disebut matriks batas bawah dan batas atas dari matriks interval $\mathbf{A}$. Lebih lanjut, matriks interval $\mathbf{A}$ dapat ditulis

$$\mathbf{A} = \left\{ A \in \overline{\mathbb{R}}(m, n); \underline{A} \leq A \leq \overline{A} \right\}.$$

Himpunan semua matriks interval max-plus berukuran $m \times n$ dinotasikan dengan $\mathcal{I}(\overline{\mathbb{R}}(m, n))$ di $\overline{\mathbb{R}}$.

Dengan menggunakan konsep interval tertutup yang merupakan suatu himpunan, maka operasi $\oplus$ dan $\otimes$ terhadap matriks interval juga dapat diinterpretasikan dalam bentuk himpunan seperti pada lema berikut:

**Lemma 3.1.** *Diberikan matriks interval max-plus* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{I}(\overline{\mathbb{R}}(n,n))$ *maka berlaku*

(1) $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B} = \{A \oplus B \mid A \in \boldsymbol{A}, B \in \boldsymbol{B}\}$.
(2) $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \{A \otimes B \mid A \in \boldsymbol{A}, B \in \boldsymbol{B}\}$.

Dengan demikian, himpunan semua persamaan matriks dengan bentuk $A \otimes X \otimes C = B$ dinotasikan dengan

$$\mathbf{A} \otimes X \otimes \mathbf{C} = \mathbf{B} \tag{3.2}$$

dengan $A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}$ dan $C \in \mathbf{C}$. Persamaan (3.2) inilah yang disebut sebagai persamaan matriks interval max-plus.

## 4. Solvabilitas Universal Persamaan Matriks Interval Max-plus

Pada bagian ini akan dibahas mengenai tiga jenis solvabilitas universal dari sistem persamaan matriks interval atas aljabar max-plus, yaitu: solvabilitas universal kuat, solvabilitas universal dan solvabilitas universal lemah.

### 4.1. Solvabilitas Universal Kuat.

**Definisi 4.1.** *Suatu matriks* $X \in \overline{\mathbb{R}}(n,s)$ *disebut penyelesaian universal kuat dari persamaan matriks interval atas aljabar max-plus* $\boldsymbol{A} \otimes X \otimes \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$ *jika persamaan matriks* $A \otimes X \otimes C = B$ *berlaku untuk setiap* $A \in \boldsymbol{A}$, $C \in \boldsymbol{C}$ *dan* $B \in \boldsymbol{B}$.

Selanjutnya, diberikan syarat perlu dan cukup penyelesaian universal kuat sebagai berikut.

**Teorema 4.2.** *Suatu matriks* $X$ *merupakan penyelesaian universal kuat dari persamaan matriks interval max-plus* $\boldsymbol{A} \otimes X \otimes \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$ *jika dan hanya jika* $\underline{B} = \overline{B} = B$ *dan*

$$\underline{A} \otimes X \otimes \underline{C} = \overline{A} \otimes X \otimes \overline{C} = B \tag{4.1}$$

.

*Bukti.* Diketahui matriks $X$ merupakan penyelesaian universal kuat, maka untuk sebarang $A \in \mathbf{A}$ dan $C \in \mathbf{C}$ berlaku $A \otimes X \otimes C = \underline{B}$ dan $A \otimes X \otimes C = \overline{B}$, sehingga diperoleh $\underline{B} = \overline{B}$. Lebih lanjut, persamaan $A \otimes X \otimes C = B$ juga berlaku untuk matriks $\underline{A}, \underline{C}$ dan $\overline{A}, \overline{C}$. Dengan kata lain, persamaan (4.1) berlaku.
Untuk arah sebaliknya, diketahui suatu matriks $X \in \overline{\mathbb{R}}(n,s)$ memenuhi persamaan (4.1). Ambil sebarang $A \in \mathbf{A}$ dan $C \in \mathbf{C}$. Berdasarkan sifat monotonik dari $\otimes$, diperoleh

$$B = \underline{A} \otimes X \otimes \underline{C} \leq A \otimes X \otimes C \leq \overline{A} \otimes X \otimes \overline{C} = B$$

Karena matriks $A \otimes X \otimes C = B$ untuk setiap $A \in \mathbf{A}$ dan $C \in \mathbf{C}$, maka matriks $X$ merupakan penyelesaian universal kuat dari persamaan matriks interval max-plus $\mathbf{A} \otimes X \otimes \mathbf{C} = \mathbf{B}$. □

Berikut ini diberikan definisi terkait persamaan matriks interval atas aljabar max-plus yang memiliki penyelesaian universal kuat.

**Definisi 4.3.** *Persamaan matriks interval atas aljabar max-plus* $\boldsymbol{A} \otimes X \otimes \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$ *memiliki penyelesaian universal kuat jika terdapat suatu matriks* $X \in \overline{\mathbb{R}}(n, s)$ *sedemikian hingga* $X$ *merupakan penyelesaian universal kuat dari persamaan matriks interval* $\boldsymbol{A} \otimes X \otimes \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$.

Syarat perlu dan cukup agar suatu persamaan matriks interval atas aljabar max-plus $\mathbf{A} \otimes X \otimes \mathbf{C} = \mathbf{B}$ memiliki penyelesaian universal kuat (*strongly universally sovable*) diberikan dalam teorema berikut.

**Teorema 4.4.** *Persamaan matriks interval atas aljabar max-plus* $\boldsymbol{A} \otimes X \otimes \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$ *memiliki penyelesaian universal kuat jika dan hanya jika* $\underline{B} = \overline{B} = B$ *dan*

$$\underline{A} \otimes X^*(\overline{A}, B, \overline{C}) \otimes \underline{C} = B \tag{4.2}$$

*Bukti.* Diketahui persamaan $\mathbf{A} \otimes X \otimes \mathbf{C} = \mathbf{B}$ memiliki penyelesaian universal kuat, misalkan matriks $Y$ merupakan penyelesaiannya. Berdasarkan Teorema 4.2, diperoleh $\underline{A} \otimes Y \otimes \underline{C} = \overline{A} \otimes Y \otimes \overline{C} = B$ dan berdasarkan Teorema 2.4(i), diperoleh $Y \leq X^*(\overline{A}, B, \overline{C})$. Berdasarkan Teorema 2.4(ii) dan sifat monotonik dari $\otimes$, maka

$$B = \underline{A} \otimes Y \otimes \underline{C} \leq \underline{A} \otimes X^*(\overline{A}, B, \overline{C}) \otimes \underline{C} \leq \overline{A} \otimes X^*(\overline{A}, B, \overline{C}) \otimes \overline{C} \leq B$$

Dengan demikian, $\underline{A} \otimes X^*(\overline{A}, B, \overline{C}) \otimes \underline{C} = B$.
Untuk arah sebaliknya, diketahui $\underline{A} \otimes X^*(\overline{A}, B, \overline{C}) \otimes \underline{C} = B$ . Berdasarkan Teorema 2.4(ii) dan sifat monotonik dari $\otimes$, maka

$$B = \underline{A} \otimes X^*(\overline{A}, B, \overline{C}) \otimes \underline{C} \leq \overline{A} \otimes X^*(\overline{A}, B, \overline{C}) \otimes \overline{C} \leq B$$

Dengan demikian, $\overline{A} \otimes X^*(\overline{A}, B, \overline{C}) \otimes \overline{C} = B$. Berdasarkan Teorema 4.2, matriks $X^*(\overline{A}, B, \overline{C})$ merupakan penyelesaian universal kuat dari persamaan matriks interval $\mathbf{A} \otimes X \otimes \mathbf{C} = \mathbf{B}$. □

4.2. **Solvabilitas Universal.**

**Definisi 4.5.** *Persamaan matriks interval atas aljabar max-plus* $\boldsymbol{A} \otimes X \otimes \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$ *memiliki penyelesaian universal jika untuk setiap* $B \in \boldsymbol{B}$ *terdapat suatu matriks* $X \in \overline{\mathbb{R}}(n, r)$ *sedemikian hingga persamaan* $A \otimes X \otimes C = B$ *berlaku untuk setiap* $A \in \boldsymbol{A}$ *dan* $C \in \boldsymbol{C}$.

Selanjutnya, diberikan syarat perlu dan cukup agar suatu persamaan matriks interval atas aljabar max-plus $\mathbf{A} \otimes X \otimes \mathbf{C} = \mathbf{B}$ memiliki penyelesaian universal (*universally sovable*) dalam lemma berikut.

**Lemma 4.6.** *Sistem persamaan matriks interval max-plus* $\boldsymbol{A} \otimes X \otimes \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$ *memiliki penyelesaian universal jika dan hanya jika untuk setiap* $B \in \boldsymbol{B}$ *berlaku*
$\underline{A} \otimes X^*(\overline{A}, B, \overline{C}) \otimes \underline{C} = B$.

*Bukti.* Berdasarkan Teorema 4.4, dapat diperhatikan bahwa untuk setiap $B \in \mathbf{B}$, konsep eksistensi penyelesaian universal sama dengan konsep eksistensi penyelesaian universal kuat pada persamaan (4.2). Oleh karena itu, sistem persamaan matriks interval max-plus $\mathbf{A} \otimes X \otimes \mathbf{C} = \mathbf{B}$ memiliki penyelesaian universal jika dan hanya jika $\underline{A} \otimes X^*(\overline{A}, B, \overline{C}) = B$ berlaku untuk setiap $B \in \mathbf{B}$. □

Selanjutnya, diberikan matriks $A \in \overline{\mathbb{R}}(m,n), B \in \overline{\mathbb{R}}(m,r)$ dan $C \in \overline{\mathbb{R}}(s,r)$. Didefinisikan matriks $B^{(pu)}$ untuk setiap $p \in M = \{1,\ldots,m\}$ dan $u \in R = \{1,\ldots,r\}$ sebagai berikut:

$$b_{ik}^{(pu)} = \begin{cases} \overline{b}_{ik}, & \text{untuk}(i,k) = (p,u). \\ \underline{b}_{ik}, & \text{lainnya} \end{cases}, \tag{4.3}$$

Berikut ini diberikan teorema terkait dengan syarat perlu dan cukup agar sistem persamaan matriks interval memiliki penyelesaian universal yang berkaitan dengan matriks $B^(pu)$.

**Teorema 4.7.** *Persamaan matriks interval max-plus* $\boldsymbol{A} \otimes X \otimes \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$ *memiliki penyelesaian universal jika dan hanya jika*

$$\underline{A} \otimes X^*(\overline{A}, B^{(pu)}, \overline{C}) \otimes \underline{C} = B^{(pu)} \tag{4.4}$$

*untuk setiap* $p \in M$ *dan* $u \in R$.

*Bukti.* Berdasarkan Lema 4.4 maka pembuktian arah ke kanan sudah jelas. Untuk arah sebaliknya, misalkan persamaan matriks interval max-plus $\mathbf{A} \otimes X \otimes \mathbf{C} = \mathbf{B}$ tidak memiliki penyelesaian universal, artinya terdapat suatu matriks $B \in \mathbf{B}$ sedemikian hingga persamaan (4.2) tidak berlaku, katakan tidak berlaku untuk anggota ke-$(p,u)$. Berdasarkan Teorema 2.4, diperoleh:

$$\max_{j \in N, l \in S} \left\{ \underline{a}_{pj} \otimes x_{ij}^* \left(\overline{A}, B, \overline{C}\right) \otimes \underline{c}_{lu} \right\} < b_{pu}$$

Dengan kata lain, untuk setiap $j \in N = \{1,\ldots,n\}$ dan $l \in S = \{1,\ldots,s\}$ berlaku

$$\underline{a}_{pj} + x_{jl}^*(\overline{A}, B, \overline{C}) + \underline{c}_{lu} < b_{pu}. \tag{4.5}$$

Oleh karena itu, diperoleh $x_{jl}^*(\overline{A}, B, \overline{C}) < b_{pu} - \underline{a}_{pj} - \underline{c}_{lu}$ untuk setiap $j \in N$ dan $l \in S$. Berdasarkan (2.6),

$$\begin{aligned} x_{jl}^* \left(\overline{A}, B, \overline{C}\right) &= \min_{k \in R} \left\{ x_j^* \left(\overline{A}, B_k\right) - \overline{c}_{lk} \right\} \\ &= \min_{k \in R} \left\{ \min_{i \in M} \left\{ b_{ik} - \overline{a}_{ij} \right\} - \overline{c}_{lk} \right\} \\ &= \min \left\{ \min_{(i,k) \neq (p,u)} \left\{ b_{ik} - \overline{a}_{ij} - \overline{c}_{lk} \right\}, b_{pu} - \overline{a}_{pj} - \overline{c}_{lu} \right\}, \end{aligned}$$

sehingga terjadi dua kemungkinan, yaitu:

$$\min_{(i,k) \neq (p,u)} \left\{ b_{ik} - \overline{a}_{ij} - \overline{c}_{lk} \right\} < b_{pu} - \underline{a}_{pj} - \underline{c}_{lu} \tag{4.6}$$

atau

$$b_{pu} - \overline{a}_{ij} - \overline{c}_{lu} < b_{pu} - \underline{a}_{pj} - \underline{c}_{lu}. \tag{4.7}$$

Berdasarkan (2.6), diperoleh

$$\begin{aligned} x^*_{jl}\left(\overline{A}, B^{(pu)}, \overline{C}\right) &= \min_{k\in R}\left\{x^*_j\left(\overline{A}, B^{(pu)}_k\right) - \overline{c}_{lk}\right\} \\ &= \min_{k\in R}\left\{\min_{i\in M}\left\{b^{(pu)}_{ik} - \overline{a}_{ij}\right\} - \overline{c}_{lk}\right\} \\ &= \min\left\{\min_{(i,k)\neq(p,u)}\left\{\underline{b}_{ik} - \overline{a}_{ij} - \overline{c}_{lk}\right\}, \overline{b}_{pu} - \overline{a}_{pj} - \overline{c}_{lu}\right\} \end{aligned}$$

Jika (4.6) berlaku, maka

$$\begin{aligned} x^*_{jl}\left(\overline{A}, B^{(pu)}, \overline{C}\right) &\leq \min_{(i,k)\neq(p,u)}\left\{\underline{b}_{ik} - \overline{a}_{ij} - \overline{c}_{lk}\right\} \\ &\leq \min_{(i,k)\neq(p,u)}\left\{b_{ik} - \overline{a}_{ij} - \overline{c}_{lk}\right\} \quad (4.8) \\ &< b_{pu} - \underline{a}_{pj} - \underline{c}_{lu} \quad (4.9) \end{aligned}$$

dan berakibat

$$\underline{a}_{pj} + x^*_{jl}\left(\overline{A}, B^{(pu)}, \overline{C}\right) + \underline{c}_{lu} < b_{pu} \leq \overline{b}_{pu}.$$

Jika (4.7) berlaku diperoleh

$$x^*_{jl}\left(\overline{A}, B^{(pu)}, \overline{C}\right) \leq \overline{b}_{pu} - \overline{a}_{pj} - \overline{c}_{lu} < \overline{b}_{pu} - \underline{a}_{pj} - \underline{c}_{lu}.$$

Dengan kata lain,

$$\underline{a}_{pj} + x^*_{jl}\left(\overline{A}, B^{(pu)}, \overline{C}\right) + \underline{c}_{lu} < \overline{b}_{pu}$$

Pada kedua kasus tersebut, diperoleh $\underline{a}_{pj} + x^*_{jl}\left(\overline{A}, B^{(pu)}, \overline{C}\right) + \underline{c}_{lu} < \overline{b}_{pu}$ untuk setiap $j \in N$ dan $l \in S$. Akibatnya, $\left[\underline{A} \otimes X^*(\overline{A}, B^{(pu)}, \overline{C}) \otimes \underline{C}\right]_{pu} < \overline{b}_{pu} = b^{(pu)}_{pu}$, sehingga persamaan (4.4) tidak berlaku di anggota ke $(p, u)$. $\square$

### 4.3. **Solvabilitas Universal Lemah.**

**Definisi 4.8.** *Persamaan matriks interval atas aljabar max-plus $\boldsymbol{A} \otimes X \otimes \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$ memiliki penyelesaian universal lemah jika suatu persamaan matriks max-plus $A \otimes X \otimes C = B$ memiliki penyelesaian untuk setiap $A \in \boldsymbol{A}, B \in \boldsymbol{B}$ dan $C \in \boldsymbol{C}$.*

Diberikan matriks max-plus $A \in \overline{\mathbb{R}}(m, n), B \in \overline{\mathbb{R}}(m, r)$ dan $C \in \overline{\mathbb{R}}(m, n)$. Didefinisikan matriks $A^{(p)}$ dan $C^{(u)}$ untuk setiap $p \in M = \{1, \ldots, m\}$ dan untuk setiap $u \in R = \{1, \ldots, r\}$ sebagai berikut:

$$a^{(p)}_{ij} = \begin{cases} \underline{a}_{ij}, & \text{jika } i = p, j \in N \\ \overline{a}_{ij}, & \text{lainnya} \end{cases}, c^{(u)}_{lk} = \begin{cases} \underline{c}_{lk}, & \text{jika } k = u, l \in S \\ \overline{c}_{lk}, & \text{lainnya} \end{cases} \quad (4.10)$$

dengan $N = \{1, \ldots, n\}$ dan $S = \{1, \ldots, s\}$.

Syarat perlu dan cukup agar suatu persamaan matriks interval atas aljabar max-plus $\mathbf{A} \otimes X \otimes \mathbf{C} = \mathbf{B}$ memiliki penyelesaian lemah (*weakly universally sovable*) diberikan dalam teorema berikut.

**Teorema 4.9.** *Persamaan matriks interval atas aljabar max-plus* $\boldsymbol{A} \otimes X \otimes \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$ *memiliki penyelesaian universal lemah jika dan hanya jika untuk setiap* $p \in M$ *dan* $u \in R$ *persamaan matriks max-plus*

$$A^{(p)} \otimes X \otimes C^{(u)} = B^{(pu)} \tag{4.11}$$

*memiliki penyelesaian.*

*Bukti.* Diketahui persamaan matriks $A^{(p)} \otimes X \otimes C^{(u)} = B^{(pu)}$ memiliki penyelesaian. Akan dibuktikan bahwa persamaan matriks interval $\mathbf{A} \otimes X \otimes \mathbf{C} = \mathbf{B}$ memiliki penyelesaian universal lemah. Andaikan terdapat matriks $A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}$ dan $C \in \mathbf{C}$ sehingga persamaan matriks $A \otimes X \otimes C = B$ tidak memiliki penyelesaian. Hal ini berarti persamaan $X^*(A, B, C) \otimes C = B$ tidak berlaku di beberapa unsur, katakan unsur ke $(p, u)$. Menurut Teorema 2.4(ii), unsur ke-$pu$ dari matriks $A \otimes X^*(A, B^{(pu)}, C) \otimes C$ tidak sama dengan $b_{pu}$ sehingga diperoleh

$$\Big[A \otimes X^*(A, B^{(pu)}, C) \otimes C\Big]_{pu} < b_{pu}. \tag{4.12}$$

Akan dibuktikan bahwa

$$\Big[A \otimes X^*(A^{(p)}, B^{(pu)}, C^{(u)}) \otimes C^{(u)}\Big]_{pu} < b_{pu}^{(pu)}. \tag{4.13}$$

Berdasarkan ketaksamaan (4.12), unsur ke-$pu$ dari matriks $A \otimes X^*(A, B^{(pu)}, C) \otimes C$ dapat ditulis dengan

$$a_{pj} + x_{jl}^*(A, B, C) + c_{lu} < b_{pu} \tag{4.14}$$

untuk setiap $j \in N = \{1, \ldots, n\}$ dan untuk setiap $l \in S = \{1, \ldots, s\}$.
Berdasarkan (2.6) diperoleh

$$\begin{aligned} x_{jl}^*(A, B, C) &= \min_{k \in R} \left\{ \min_{i \in M} \{b_{ik} - a_{ij}\} - c_{lk} \right\} \\ &= \min \left\{ \min_{(i,k) \neq (p,u)} \{b_{ik} - a_{ij} - c_{lk}\}, b_{pu} - a_{pj} - c_{lu} \right\} \\ &< b_{pu} - a_{pj} - c_{lu} \end{aligned} \tag{4.15}$$

sehingga berdasarkan (4.15) diperoleh

$$\min_{(i,k) \neq (p,u)} \{b_{ik} - a_{ij} - c_{lk}\} < b_{pu} - a_{pj} - c_{lu}. \tag{4.16}$$

Untuk setiap $j \in N$ dan $l \in S$,

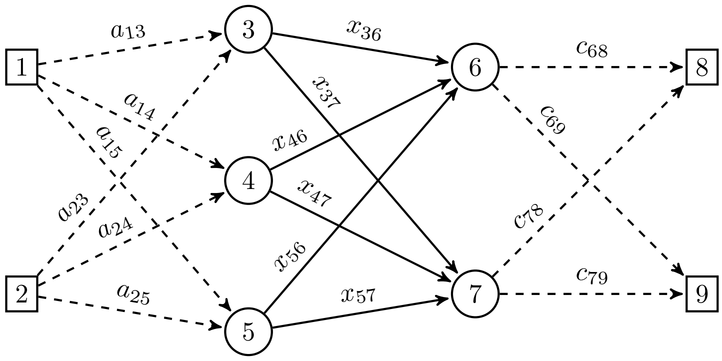
$$\begin{aligned} a_{pj}^{(p)} + x_{jl}^{*}(A^{(p)}, B^{(pu)}, C^{(u)}) + c_{lu}^{(u)} &= \underline{a}_{pj} + \min_{k\in R}\left\{x_j^{*}(A^{(p)}, B_k^{(pu)}) - c_{lk}^{(u)}\right\} + \underline{c}_{lu} \\ &= \underline{a}_{pj} + \min_{i\in M.k\in R}\left\{b_{lk}^{(pu)} - a_{ij}^{(p)} - c_{lk}^{(u)}\right\} + \underline{c}_{lu} \\ &\leq \underline{a}_{pj} + \min_{(i,k)\neq(p,u)}\{\underline{b}_{lk} - \overline{a}_{ij} - \overline{c}_{lk}\} + \underline{c}_{lu} \\ &\leq \underline{a}_{pj} + \min_{(i,k)\neq(p,u)}\{b_{lk} - a_{ij} - c_{lk}\} + \underline{c}_{lu} \\ &< \underline{a}_{pj} + b_{pu} - a_{pj} - c_{lu} + \underline{c}_{lu} \\ &\leq b_{pu} \leq \overline{b}_{pu}. \end{aligned}$$

Karena $a_{pj}^{(p)} + x_{jl}^{*}(A^{(p)}, B^{(pu)}, C^{(u)}) + c_{lu}^{(u)} < b_{pu}^{(pu)}$ untuk setiap $j \in N$ dan untuk setiap $l \in S$, maka ketaksamaan (4.13) terpenuhi. Oleh karena itu, (4.11) tidak memiliki penyelesaian.

Untuk arah sebaliknya, diketahui $\mathbf{A}\otimes X\otimes\mathbf{C} = \mathbf{B}$ memiliki penyelesaian universal lemah maka setiap persamaan matriks dengan bentuk $A \otimes X \otimes C = B$ sedemikian hingga $A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}$ dan $C \in \mathbf{C}$ memiliki penyelesaian. Jadi (4.11) memiliki penyelesaian untuk setiap $p \in M$ dan untuk setiap $u \in R$. □

## 5. STUDI KASUS

Pada bagian ini diberikan studi kasus yang merujuk pada jurnal yang ditulis oleh [9]. Pada kasus ini terdapat jaringan transportasi seperti pada Gambar 1. Waktu trans-




GAMBAR 1. Jaringan Sistem Transportasi

portasi yang ditempuh diberikan dalam Tabel 1. Misalkan $x_{36}, x_{37}, x_{46}, x_{47}, x_{56}, x_{57}$ adalah waktu tempuh yang belum diketahui sedemikian sehingga jumlah waktu transportasi yang ditempuh dari tempat asal ke tujuan seperti pada Tabel 2. Berdasarkan

| Simbol | Jalur Transportasi | Waktu Transportasi (Jam) |
|---|---|---|
| $a_{13}$ | (1, 3) | [3.2, 4.8] |
| $a_{14}$ | (1, 4) | [4.2, 6.3] |
| $a_{15}$ | (1, 5) | [8.5, 14.2] |
| $a_{23}$ | (2, 3) | [8.5, 15.5] |
| $a_{24}$ | (2, 4) | [6.0, 13.5] |
| $a_{25}$ | (2, 5) | [4.5, 6.8] |
| $c_{68}$ | (6, 8) | [5.5, 7.5] |
| $c_{69}$ | (6, 9) | [3.6, 5.2] |
| $c_{78}$ | (7, 8) | [7.6, 9.3] |
| $c_{79}$ | (7, 9) | [2.5, 4.5] |

Tabel 1. Waktu Transportasi

| Simbol | Jalur Transportasi | Waktu Transportasi (Jam) |
|---|---|---|
| $b_{18}$ | (1, 8) | [30, 30] |
| $b_{19}$ | (1, 9) | [25, 25] |
| $b_{28}$ | (2, 8) | [30, 30] |
| $b_{29}$ | (2, 9) | [25, 25] |

Tabel 2. Estimasi Jumlah Waktu Transportasi

Tabel 1 dan Tabel 2, data waktu transportasi dapat ditulis dalam bentuk matriks interval **A**, **B** dan **C**, sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} [3.2, 4.8] & [4.2, 6.3] & [8.5, 14.2] \\ [8.5, 15.5] & [6.0, 13.5] & [4.5, 6.8] \end{pmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} [30, 30] & [25, 25] \\ [30, 30] & [25, 25] \end{pmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} [5.5, 7.5] & [3.6, 5.2] \\ [7.6, 9.3] & [2.5, 4.5] \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Diperhatikan bahwa persamaan yang terbentuk tersebut mengarah pada sistem persamaan matriks interval dengan bentuk $\mathbf{A} \otimes X \otimes \mathbf{C} = \mathbf{B}$ dengan $X = \begin{pmatrix} x_{36} & x_{37} \\ x_{46} & x_{47} \\ x_{56} & x_{57} \end{pmatrix}$.

Dalam menentukan jenis solvabilitasnya digunakan program Phython 3.0 dan diperoleh sistem persamaan matriks interval tersebut tidak memiliki penyelesaian universal kuat namun memiliki penyelesaian universal. Penyelesaian yang diperoleh adalah

$$X^*(\overline{A}, B^{(pu)}, \overline{C}) = \begin{pmatrix} 4.3 & 5.0 \\ 6.3 & 7.0 \\ 5.6 & 6.3 \end{pmatrix}$$

untuk setiap $p = 1, 2$ dam $u = 1.2$.

Hal ini berarti untuk setiap jumlah waktu transportasi yang diharapkan terdapat waktu transportasi antar tempat penghubung yang memenuhi jumlah waktu transportasi tersebut untuk setiap waktu transportasi dari tempat asal ke tempat penghubung dan setiap waktu transportasi dari tempat penghubung ke tempat tujuan yang diberikan.

## 6. PENUTUP

Berdasarkan syarat perlu dan cukup dalam menentukan solvabilitas universal dari suatu sistem persamaan matriks interval max-plus, diperoleh kesimpulan bahwa jika sistem persamaan matriks interval dengan bentuk $\mathbf{A} \otimes X \otimes \mathbf{C} = \mathbf{B}$ memiliki penyelesaian universal kuat maka sistem tersebut juga memiliki penyelesain universal dan jika sistem persamaan matriks interval tersebut memiliki penyelesaian universal maka sistem tersebut memiliki sistem penyelesaian universal lemah.

## Referensi

[1] De Schutter, B. dan van den Boom., T.,2008, Max-plus algebra and max-plus linear discrete event systems: An introduction, *Proceedings of the 9th International Workshop on Discrete Event Systems (WODES'08), 36-42.*

*[2] Cechlárova, K., dan Cuninghame-Green, R.A., 2002, Interval Systems of Max-separable Linear Equations Linear Algebra and its Application, 215-224.*

*[3] Cuninghame-Green dan Raymond, Minimax Algebra, Springer-Verlag, New York, 1979.*

*[4] Heidergott, B., Olsder, G. J., dan Van Der Woude, J.,* Max Plus at Work*, Princeton University Press, New Jersey, 2006.*

*[5] Myšková, H., 2016, Interval Max-plus Matrix Equations,* Linear Algebra Appl, 111-127.

[6] Myšková, H., 2017, Universal Solvability on Interval max-plus matrix equations, *Discrete Applied Mathemathics*, 165-173.

[7] Rudhito, Andy., Wahyuni, Sri., Suparwanto, Ari., dan Susilo, F., 2001, Matriks atas Aljabar Max-Plus Interval , *Jurnal Natur Indonesia*, Vol. 13 No.2. 94-99.

[8] Butkovič, P. dan Fiedler, M., 2011, *Tropical tensor pruduct and beyond*, http://web.mat.bham.ac.uk/P.Butkovic/Pubs.html.

[9] Sun, Yan., 2020, Green and reliable freight routing problem in the road-rail intermodal transportation network with uncertain parameters: A fuzzy goal programming approach, *Journal of Advanced Transportation*, vol. 2020, 1-21.

MIRA WADU* (Penulis Korespondensi)
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia.
miirawadu@gmail.com

ARI SUPARWANTO
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia.
ari_suparwanto@ugm.ac.id