Jurnal Matematika Thales (JMT): 2022 ISSN: 2715-1891
Vol. 04 No. 01

SIFAT-SIFAT RING PRESIMPLIFIABEL DAN RING PRESIMPLIFIABEL LEMAH (THE PROPERTIES OF PRÉSIMPLIFIABLE AND WEAKLY PRÉSIMPLIFIABLE RINGS)

DEBY ANASTASYA*, SRI WAHYUNI

Abstract. Let R be a commutative ring and let $a, b \in R$. Then a and b said to be associates if $a \mid b$ and $b \mid a$, so $a = rb$ and $b = sa$ for some $r, s \in R$. Associates generalized to a ring motivate the idea about definition of présimplifiable ring and weakly présimplifiable ring. First of all, we provide definitions of very strong associates, strong regular associates, very strongly associate ring, and strongly regular associate ring. Furthermore,it will be shown the properties between présimplifiable ring and weakly présimplifiable ring.

Keywords: Very strongly associate ring, Strongly reguler associate ring, Présimplifiable ring, Weakly présimplifiable ring.

Abstrak. Diberikan ring komutatif R dan diambil a, b elemen-elemen di dalam ring R. Elemen a dan b dikatakan berelasi asosiasi jika $a \mid b$ dan $b \mid a$, artinya $b = sa$ dan $a = rb$ untuk suatu elemen $r, s \in R$. Relasi asosiasi yang digeneralisasi pada suatu ring dapat memotivasi terciptanya pengertian ring presimplifiabel dan ring presimplifiabel lemah. Pertama-tama akan diberikan definisi mengenai relasi asosiasi sangat kuat, relasi asosiasi reguler kuat, ring berasosiasi sangat kuat dan ring berasosiasi reguler kuat. Selanjutnya akan ditunjukkan sifat-sifat antara ring presimplifiabel dan ring presimplifiabel lemah.

Kata-kata kunci: Ring berasosiasi sangat kuat, Ring berasosiasi reguler kuat, Ring presimplifiabel, Ring presimplifiabel lemah.

1. PENDAHULUAN

Dalam teori ring, diketahui bahwa terdapat elemen-elemen khusus seperti elemen reguler ataupun elemen unit. Elemen unit itu sendiri sering dikaitkan dengan ketereduksian dan keprimaan suatu elemen, salah satunya pada relasi asosiasi. Diberikan ring komutatif R dengan elemen satuan dan diambil elemen tak nol a dan b di dalam ring R. Elemen $a \in R$ dikatakan berasosiasi dengan elemen $b \in R$, jika memenuhi $a = ub$ untuk suatu elemen unit $u \in R$ [3].

Karena relasi asosiasi pada elemen-elemen suatu ring dapat digeneralisasi, hal ini memotivasi Anderson dan Chun [2] serta Mooney dan Wang [4] untuk mendefinisikan ring presimplifiabel dan ring presimplifiabel lemah. Secara khusus, Anderson dan Chun [2] memberikan definisi lebih lanjut mengenai relasi asosiasi. Penelitian tersebut juga memberikan definisi ring berasosiasi sangat kuat yang dapat dikaitkan dengan ring presimplifiabel. Mooney dan Wang [4] juga memberikan definisi lebih lanjut mengenai relasi asosiasi yang dikaitkan dengan suatu ideal yang dibangun oleh suatu elemen. Berdasarkan definisi tersebut, dapat didefinisikan ring berasosiasi reguler kuat yang dapat dikaitkan dengan ring presimplifiabel lemah.

Penelitian ini membahas sifat-sifat pada ring presimplifiabel dan ring presimplifiabel lemah. Untuk mengetahui sifat-sifat pada ring presimplifiabel dan ring presimplifiabel lemah, diperlukan pengertian mengenai ring berasosiasi sangat kuat dan ring berasosiasi reguler kuat. Diasumsikan ring R adalah ring komutatif dengan elemen satuan.

2. RING PRESIMPLIFIABEL

2.1. Relasi Asosiasi dan Relasi Asosiasi Sangat Kuat.

Definisi 2.1. [2] *Diberikan ring komutatif R dan a, b elemen-elemen di dalam R. Elemen a dan b dikatakan berelasi asosiasi, dinotasikan dengan $a \sim b$, jika $a \mid b$ dan $b \mid a$, artinya $b = sa$ dan $a = rb$ untuk suatu elemen $r, s \in R$. Elemen a dan b dikatakan berelasi asosiasi sangat kuat, dinotasikan dengan $a \cong b$, jika $a \sim b$ dan ketika $a \neq 0$ dengan $a = rb$ untuk suatu $r \in R$, maka berakibat $r \in U(R)$.*

Selanjutnya diberikan definisi relasi asosiasi dan relasi asosiasi sangat kuat yang dikaitkan dengan ideal utama pada suatu ring.

Definisi 2.2. [4] *Diberikan ring komutatif R dengan elemen satuan dan $a, b \in R$. Elemen a dan b dikatakan berelasi asosiasi, dinotasikan dengan $a \sim b$, jika memenuhi $(a) = (b)$ dengan $(a) = \{ra \mid r \in R\}$, yaitu ideal utama yang dibangun oleh elemen a dalam ring R. Elemen a dan b dikatakan berelasi asosiasi sangat kuat, dinotasikan dengan $a \cong b$, jika berlaku pernyataan-pernyataan sebagai berikut.*

(1) $a \sim b$.
(2) $a = b = 0$ *atau jika* $a = rb$ *untuk suatu* $r \in R$, *maka diperoleh* $r \in U(R)$.

2.2. **Ring Berasosiasi Sangat Kuat.**

Definisi 2.3. [4] *Diberikan ring komutatif R dengan elemen satuan. Ring R dikatakan ring berasosiasi sangat kuat, jika untuk suatu $a, b \in R$ dengan $a \sim b$, maka berlaku $a \cong b$.*

Contoh 2.4. *Diberikan ring suku banyak $\mathbb{Q}[X]$. Diambil $f(X), g(X) \in \mathbb{Q}[X]$ dengan $f(X) = 9X^2 - 18X + 9$ dan $g(X) = 2X^2 - 4X + 2$. Akan ditunjukkan bahwa suku banyak $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ berelasi asosiasi sangat kuat dengan suku banyak $g(X) \in \mathbb{Q}[X]$. Diperhatikan bahwa,*

$$f(X) = h_1[X]g(X) \Leftrightarrow 9X^2 - 18X + 9 = \left(\frac{9}{2}\right)(2X^2 - 4X + 2)$$

untuk suatu elemen $h_1(X) = \frac{9}{2} \in \mathbb{Q}[X]$, serta

$$g(X) = h_2[X]f(X) \Leftrightarrow 2X^2 - 4X + 2 = \left(\frac{2}{9}\right)(9X^2 - 18X + 9)$$

untuk suatu elemen $h_2(X) = \frac{2}{9} \in \mathbb{Q}[X]$.
Karena $f(X) = h_1(X)g(X)$ dan $g(X) = h_2(X)f(X)$, sedemikian sehingga $g(X) \mid f(X)$ dan $f(X) \mid g(X)$. Oleh karena itu, diperoleh bahwa $f(X) \sim g(X)$. Selanjutnya, elemen $h_1(X) = \frac{9}{2}$ merupakan elemen unit di $\mathbb{Q}[X]$. Karena terdapat elemen $h_2(X) = \frac{2}{9} \in \mathbb{Q}[X]$, sedemikian sehingga $h_1(X)h_2(X) = h_2(X)h_1(X) = 1_{\mathbb{Q}[X]}$. Karena $f(X) \sim g(X)$ dan $f(X) = h_1(X)g(X)$ dengan $0 \geq f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ dan $h_1[X] \in \mathbb{Q}[X]$ merupakan elemen unit, sedemikian sehingga $f(X) \cong g(X)$. Dengan kata lain, $\mathbb{Q}[X]$ merupakan ring berasosiasi sangat kuat.

2.3. **Ring Presimplifiabel.**

Definisi 2.5. [4] *Diberikan ring komutatif R. Ring R dikatakan ring presimplifiabel, jika untuk suatu $x, y \in R$ dengan $x = xy$, maka berlaku $x = 0$ atau $y \in U(R)$.*

Selanjutnya terdapat hubungan antara ring berasosiasi sangat kuat dan ring presimplifiabel.

Proposisi 2.6. [4] *Ring R presimplifiabel jika dan hanya jika R merupakan ring berasosiasi sangat kuat.*

Bukti. Diberikan ring komutatif R dan diambil sebarang $a, b \in R$.
($\Rightarrow$) Diketahui bahwa R merupakan ring presimplifiabel. Akan dibuktikan bahwa R ring berasosiasi sangat kuat. Misalkan $a \sim b$, artinya berdasarkan definisi 2.2 diperoleh bahwa $(a) = (b)$. Akan ditunjukkan bahwa $a \cong b$. Jika $a = 0$, maka diperoleh bahwa $b = 0$ karena $(a) = (b)$. Mengingat $\sim$ memiliki sifat simetris, sehingga jika $b = 0$, maka diperoleh bahwa $a = 0$. Selanjutnya, jika a dan b merupakan elemen tak nol di ring R, maka dapat dimisalkan $a = rb$ untuk suatu $r \in R$. Mengingat $(a) = (b)$, sehingga diperoleh bahwa $b = sa$ untuk suatu $s \in R$. Oleh karena itu, $a = (rs)a$ untuk suatu $r, s \in R$. Mengingat bahwa ring R presimplifiabel, sedemikian sehingga diperoleh $rs \in U(R)$. Dengan kata lain, $a \cong b$. Jadi, R merupakan ring berasosiasi sangat kuat.
($\Leftarrow$) Diketahui R ring berasosiasi sangat kuat. Misalkan $a = ba$ untuk suatu elemen

$a, b \in R$. Akan ditunjukkan bahwa R merupakan ring presimplifiabel. Hal ini dapat ditunjukkan dengan membuktikan $a = 0$ atau $b \in U(R)$. Mengingat $(a) = (a)$, diperoleh bahwa $a \sim a$. Selanjutnya karena R ring berasosiasi sangat kuat, hal ini menunjukkan bahwa $a \cong a$. Jika a merupakan elemen tak nol di ring R, maka diperoleh $a = ba$ untuk suatu $b \in R$. Dengan kata lain, $b \in U(R)$. Jadi, R merupakan ring presimplifiabel. □

Berikut ini adalah teorema penting mengenai keterkaitan karakterisasi-karakterisasi yang ekuivalen dengan ring presimplifiabel [1].

Teorema 2.7. *Diberikan ring komutatif R. Pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen:*

(1) *Untuk setiap $a, b \in R$, $a \sim b \Rightarrow a \cong b$.*
(2) *Untuk setiap $a, b \in R$, $a \approx b \Rightarrow a \cong b$.*
(3) *Untuk setiap $a, b \in R$, $a \cong a$.*
(4) *R merupakan ring presimplifiabel.*
(5) *$Z(R) \subseteq 1 - U(R) = \{1 - u | u \in U(R)\}$.*
(6) *$Z(R) \subseteq J(R)$.*
(7) *Untuk $0 \neq r \in R$, $sRr = Rr \Rightarrow s \in U(R)$.*

Bukti.

(1) $\Rightarrow$ (2) Diambil sebarang $a, b \in R$. Misalkan $a \sim b$, artinya $a = rb$ dan $b = sa$ untuk suatu $r, s \in R$. Karena $a \in R$ elemen tak nol di dalam R dengan $a = rb$ untuk suatu $r \in R$, maka berakibat $r \in U(R)$. Dengan kata lain, $a \approx b$. Mengingat $a \sim b$, diperoleh bahwa $a \cong b$, sedemikian sehingga untuk $a \approx b$, diperoleh $a \cong b$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Diambil sebarang $a \in R$. Diperhatikan bahwa, $a = ua$ dimana $u \in U(R)$, maka berakibat $a \approx a$. Dengan kata lain, $a \cong a$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Diambil sebarang $a \in R$. Diasumsikan $a = ba$, maka $a \cong a$. Mengingat bahwa $a = 0$ atau $b \in U(R)$, maka R merupakan ring presimplifiabel.

(4) $\Rightarrow$ (5) Misalkan $x \in Z(R)$. Artinya $zx = 0$ dimana $0 \neq z \in R$. Diperhatikan bahwa, $z = z - zx = z(1 - x)$, diperoleh $(1 - x) \in U(R)$. Oleh karena itu, $x = 1 - (1 - x) \in 1 - U(R)$. Jadi $Z(R) \subseteq 1 - U(R)$.

(5) $\Rightarrow$ (6) Misalkan $x \in Z(R)$. Untuk suatu $r \in R$, berlaku $-rx \in Z(R)$. Diperhatikan bahwa, $-rx = 1 - (1 + rx)$, maka diperoleh $(1 + rx) \in U(R)$. Dengan kata lain, $x \in J(R)$. Jadi, $Z(R) \subseteq J(R)$.

(6) $\Rightarrow$ (7) Misalkan $0 \neq r \in R$ dan $sRr = Rr$ untuk suatu $r \in R$. Dibentuk $r = str$ untuk suatu $s, t \in R$. Diperhatikan bahwa $r(1 - st) = 0$, maka $(1 - st) \in Z(R) \subseteq J(R)$. Dengan kata lain, $st = 1 - (1 - st) \in U(R)$, berakibat $s \in U(R)$.

(7) $\Rightarrow$ (1) Misalkan $a \sim b$ dan $0 \neq a \in R$. Artinya untuk suatu $r \in R$ berlaku $a = rb$. Diperhatikan bahwa $ta = rtb = rta$ suatu $t \in R$, hal ini berarti $Ra = rRb = rRa$. Oleh karena itu, $r \in R$, sedemikian sehingga $a \cong b$.

□

3. RING PRESIMPLIFIABEL LEMAH

3.1. Relasi Asosiasi Reguler Kuat.

Definisi 3.1. [2] *Diberikan ring komutatif R dan $a, b \in R$. Elemen a dan b dikatakan berelasi asosiasi reguler sangat kuat, dinotasikan dengan $a \cong_r b$, jika elemen a dan b berasosiasi dan berlaku salah satu sifat di antara berikut.*

(1) $a = b = 0$
(2) *jika $a = rb$, maka r merupakan elemen reguler.*

3.2. Ring Berasosiasi Reguler Kuat.

Berdasarkan definisi 3.1, sehingga dapat dibentuk ring berasosiasi reguler kuat sebagai berikut.

Definisi 3.2. [2] *Diberikan R merupakan ring komutatif. Ring R dikatakan ring berasosiasi reguler kuat, jika untuk suatu $a, b \in R$ dengan $a \sim b$, maka diperoleh $a \approx_r b$.*

Teorema 3.3. *Ring $C([a, b])$ merupakan ring berasosiasi reguler kuat.*

Bukti. Terbukti berdasarkan Teorema 12 pada [2]. □

Selanjutnya, Anderson dan Chun [2] memberikan contoh ring yang bukan merupakan ring berasosiasi reguler kuat. Dalam hal ini dikaitkan dengan idealisasi modul atas ring R.

Contoh 3.4. *Diberikan ring komutatif R yang bukan merupakan ring berasosiasi kuat dan $M = \oplus_{\mathcal{M} \in maks(R)} R/\mathcal{M}$. Misalkan $R(+)M$ bukan merupakan ring berasosiasi reguler kuat. Diperhatikan bahwa, $Z(R(+)M) = (R - U(R))(+)M = R(+) - U(R(+)M)$, sedemikian sehingga $R(+)M$ merupakan ring hasil bagi total. Mengingat bahwa R bukan ring berasosiasi kuat, artinya terdapat $a, b \in R$ dengan $a \sim b$, tetapi $a \not\approx b$. Misalkan $(a, 0) \sim (b, 0)$, tetapi $(a, 0) \not\approx_r (b, 0)$ pada $R(+)M$. Selanjutnya, jika $(b, 0) = (r, m)(a, 0)$ untuk suatu elemen reguler $(r, m) \in R(+)M$, maka diperoleh $r \in U(R)$. Dengan kata lain, $a \approx b$. Hal ini terjadi kontradiksi dengan pengandaian.*

3.3. Ring Presimplifiabel Lemah.

Definisi 3.5. [2] *Diberikan R merupakan ring komutatif. Ring R dikatakan ring presimplifiabel lemah, jika untuk suatu $a, b \in R$ dengan $a = ab$, maka berlaku $a = 0$ atau b adalah elemen reguler.*

Teorema 3.6. *Diberikan ring komutatif R dengan elemen satuan yang merupakan ring presimplifiabel lemah. Misalkan S adalah suatu himpunan tak kosong di dalam ring R. Himpunan S subring dari ring R, jika S merupakan ring presimplifiabel lemah.*

Bukti.

(1) Diperhatikan bahwa himpunan $S \neq \emptyset$, karena terdapat elemen satuan $1 \in S$ yang merupakan elemen reguler, sedemikian sehingga $1 \cdot s = s \in S$.
(2) Untuk setiap $s, t \in S$ berlaku $s \cdot t = s \in S$. Berdasarkan definisi 3.5, diperhatikan bahwa

$$s - t = st - t = t(s - 1).$$

Misalkan $s = 0$, maka diperoleh $s - t = t(-1)$. Mengingat bahwa (-1) elemen reguler pada S, sedemikian sehingga $s - t = t(-1) = t \in S$.
Jadi, diperoleh bahwa S merupakan subring dari ring R.

□

Akibat 3.7. [2] *Ring presimplifiabel lemah R merupakan ring berasosiasi reguler kuat.*

Bukti. ($\Rightarrow$) Diketahui R merupakan ring presimplifiabel lemah. Artinya untuk suatu elemen $a, b \in R$ dengan $a = ba$, maka diperoleh $a = 0$ atau b elemen reguler. Akan dibuktikan bahwa R ring berasosiasi reguler kuat. Asumsikan bahwa $a \sim b$, artinya $a \mid b$ dan $b \mid a$. Diperhatikan bahwa, untuk suatu elemen $r, s \in R$ diperoleh bahwa $a = rb$ dan $b = sa$. Dengan dilakukan substitusi, sedemikian sehingga $a = r(sa)$. Berdasarkan sifat asosiatif pada ring R, diperoleh bahwa $a = (rs)a$. Mengingat R ring presimplifiabel lemah, sedemikian sehingga $rs \in R$ merupakan elemen reguler. Oleh karena itu, $r \in R$ elemen reguler dan $s \in R$ elemen reguler. Dengan demikian, karena $a = rb$ dan $b = sa$ untuk suatu elemen reguler $r, s \in R$ diperoleh bahwa $a \approx_r b$.
($\Leftarrow$) Diketahui bahwa R ring berasosiasi reguler kuat. Misalkan $a = ba$ untuk suatu elemen $a, b \in R$. Akan ditunjukkan bahwa R ring presimplifiabel lemah. Hal ini dapat ditunjukkan dengan untuk suatu elemen $a, b \in R$ dengan sifat $a = ba$, maka berlaku $a = 0$ atau b elemen reguler. Selanjutnya karena $(a) = (a)$, maka diperoleh bahwa $a \sim a$. Mengingat R ring berasosiasi reguler kuat, sedemikian sehingga $a \approx_r a$. Jika a elemen tak nol di ring R, maka diperoleh bahwa $a = ba$ untuk suatu elemen $b \in R$. Dengan kata lain, $b \in R$ elemen reguler. Oleh karena itu, jika $a = ba$ dengan $b \in R$ elemen reguler, maka diperoleh bahwa R merupakan ring presimplifiabel lemah. □

Berikut ini adalah teorema penting mengenai keterkaitan karakterisasi-karakterisasi yang ekuivalen dengan ring presimplifiabel lemah [2].

Teorema 3.8. *Diberikan ring komutatif R. Pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen:*

(1) *Untuk setiap $a, b \in R$ dengan $a \sim b$, berlaku $a \cong_r b$.*
(2) *Untuk setiap $a, b \in R$ dengan $a \approx_r b$, berlaku $a \cong_r b$.*
(3) *Untuk setiap $a, b \in R$ dengan $a \approx b$, berlaku $a \cong_r b$.*
(4) *Untuk setiap $a \in R$, $a \cong_r a$.*
(5) *R merupakan ring presimplifiabel lemah.*
(6) *$Z(R) \subseteq I - reg(R)$.*
(7) *Untuk himpunan ideal-ideal (prima) $P, Q \subseteq Z(R)$, berlaku $P + Q \neq R$.*
(8) *Untuk setiap $a, b \in Z(R)$, berlaku $(a, b) \neq R$.*
(9) *Untuk setiap $a \in R$, berlaku baik elemen a atau $a - 1$ merupakan elemen reguler.*
(10) *Untuk setiap $0 \neq r \in R$ dengan $sRr = Rr$, berlaku s merupakan elemen reguler.*

Bukti.

(1) $\Rightarrow$ (2) Diambil sebarang $a, b \in R$ dengan sifat $a \sim b$. Artinya terdapat $r, s \in R$ sedemikian sehingga berlaku $a = rb$ dan $b = sa$. Misalkan $a \approx_r b$, artinya terdapat elemen reguler $r, s \in R$, maka berlaku $a = rb$ dan $b = sa$. Mengingat $a \sim b$ dan $a = rb$ untuk suatu elemen reguler r, diperoleh bahwa $a \cong_r b$.

$(2) \Rightarrow (3)$ Diambil sebarang $a, b \in R$. Misalkan $a \approx_r b$, artinya terdapat elemen reguler $r, s \in R$ sedemikian sehingga $a = rb$ dan $b = sa$. Misalkan $a \approx b$. artinya $a = ub$ untuk suatu elemen unit $u \in R$. Mengingat $a = rb$ dan $b = sa$ untuk suatu elemen $r, s \in R$, sedemikian sehingga $a \sim b$. Lebih lanjut, $a \sim b$ dan $a = ub$ untuk suatu $u \in U(R) \subseteq R$, maka diperoleh $a \cong_r b$.

$(3) \Rightarrow (4)$ Diambil sebarang $a \in R$. Diperhatikan bahwa $a = ua$ untuk suatu $u \in U(R)$, sedemikian sehingga $a \approx a$. Dengan kata lain, $a \cong_r a$.

$(4) \Rightarrow (5)$ Diambil sebarang $a \in R$. Diasumsikan bahwa $a = ba$, maka $a \cong_r a$ untuk suatu $b \in R$. Mengingat $a = 0$ atau b merupakan elemen reguler, diperoleh bahwa R merupakan ring presimplifiabel lemah.

$(5) \Rightarrow (6)$ Misalkan $z \in Z(R)$. Artinya $xz = 0$ dengan $0 \neq x \in R$. Diperhatikan bahwa, $x = x - xz = x(1 - z)$. Mengingat x elemen tak nol di R, diperoleh bahwa $(1 - z) \in R$ merupakan merupakan elemen reguler. Oleh karena itu, $z = 1 - (1 - z) \in 1 - reg(R)$. Dengan kata lain,
$Z(R) \subseteq 1 - reg(R)$.

$(6) \Rightarrow (7)$ Diberikan ideal prima P, Q dengan $P, Q \subseteq Z(R)$.
Andaikan $P + Q = R$. Artinya, terdapat $p \in P$ dan $q \in Q$ dengan $p + q = 1$. Mengingat $q = 1 - r$ dengan $r \in reg(R)$, sedemikian sehingga $p + q = 1 \Leftrightarrow 1 - p = q = 1 - r$. Dengan kata lain, $p = r$ merupakan elemen reguler.
Hal ini kontradiksi dengan pengandaian. Oleh karena itu, $P + Q \neq R$.

$(7) \Rightarrow (8)$ Misalkan $a, b \in Z(R)$. Artinya $ar = 0$ dan $br = 0$ untuk setiap $r \in R$. Mengingat $ar = 0$ dan $br = 0$, hal ini juga berarti $(a + b)r = 0$. Dengan kata lain, $(a + b)$ merupakan elemen reguler. Jadi, $(a, b) \neq R$.

$(8) \Rightarrow (9)$ Diambil sebarang $a \in R$. Asumsikan bahwa $a \in Z(R)$.
Diperhatikan bahwa, $ar = 0 \Leftrightarrow (a + 0)r = 0$. Hal ini berarti $(a + 0)$ merupakan elemen reguler di $Z(R)$, dengan kata lain a elemen reguler.

$(9) \Rightarrow (10)$ Diambil sebarang elemen tak nol $r \in R$.
Diberikan r merupakan elemen reguler. Misalkan $sRr = Rr$, artinya $r = str$ untuk suatu $t \in R$. Mengingat bahwa r elemen reguler, sehingga diperoleh $s = r$.
Hal ini berarti s merupakan elemen reguler.

$(10) \Rightarrow (1)$ Diambil sebarang $a, b \in R$. Misalkan $a \sim b$, artinya untuk suatu $r, s \in R$, diperoleh bahwa $a = rb$ dan $b = sa$. Mengingat bahwa r dan s merupakan elemen reguler, maka diperoleh $a \cong_r b$.

□

4. **PENUTUP**

Ring presimplifiabel dan ring presimplifiabel lemah merupakan konsep generalisasi dari relasi asosiasi pada suatu ring, khususnya pada ring komutatif dengan elemen satuan. Ring presimplifiabel merupakan ring komutatif dengan kondisi tertentu dimana elemen tak nolnya merupakan elemen unit pada suatu ring. Sedangkan ring presimplifiabel lemah merupakan ring komutatif dengan kondisi tertentu dimana elemen tak nolnya merupakan elemen reguler pada suatu ring. Selanjutnya, ring R presimplifiabel jika dan hanya jika R ring berasosiasi sangat kuat. Sedangkan ring R presimplifiabel lemah jika dan hanya jika R ring berasosiasi reguler kuat.

Referensi

[1] Anderson, D.D., Axtell, M., Forman, S.J., dan Stickles, J. 2004. *When are Associates Unit Multiples?*. Rocky Mountain J. Math., Vol. 34 No. 3, pp. 811-828.

[2] Anderson, D.D. dan Chun, S. 2014. *Associate Elements in Commutative Rings*. Rocky Mountain J. Math., Vol. 44 No. 3.

[3] Malik, D. S., Mordeson, J.M., Sen, M.K. 1997. *Fundamentals of Abstract Algebra*. McGraw-Hill Companies, Inc., Singapore.

[4] Mooney, C.P. dan Wang, Y. 2018. *On τ-U-irreducible elements in Strongly Associate Ring*. The Minnesota Journal of Undergraduate Mathematics, Vol. 4.

DEBY ANASTASYA* (Penulis Korespondensi)
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia.
deby.anastasya@mail.ugm.ac.id

SRI WAHYUNI
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia.
swahyuni@ugm.ac.id