Jurnal Matematika Thales (JMT): 2022 ISSN: 2715-1891
Vol. 04 No. 01

KARAKTERISTIK GRUP BEBAS (CHARACTERISTIC OF FREE GROUPS)

FITRI ALFIANTI*, INDAH EMILIA WIJAYANTI

Abstract. The set X of a group G is said to be a free generating set if every element of G could be uniquely expressed as a product elements of X. A free group is defined as a containing set of free generating group. Furthermore, the set of free generators is referred to as a basis. Any two bases of a commutative free group have the same cardinality. One of the characteristics of the free group discussed in the study that any group is a factor group of a free group. Suppose m and n are cardinal numbers and $n \leq m$, then F_m can be inserted into F_n. As a result a free group with a higher rank can be inserted into a free group with a lower rank. The presentation $< S|R >$ is called a finite presentation if the sets S and R are finite sets. A group is said to be represented finitely if it has at least one finite presentation.

Keywords: group, free group, group presentation, free generating set, finite presentation.

Abstrak. Himpunan X dari suatu grup G dikatakan sebagai himpunan pembangun bebas jika setiap anggota dari G dapat dinyatakan secara tunggal sebagai perkalian anggota-anggota dari X. Suatu grup bebas didefinisikan sebagai grup yang memuat himpunan pembangun bebas. Selanjutnya, himpunan pembangun bebas disebut sebagai basis. Sebarang dua basis dari suatu grup bebas komutatif mempunyai kardinalitas yang sama. Salah satu sifat pada grup bebas yang dibahas dalam penelitian ini adalah fakta bahwa sebarang grup merupakan grup faktor dari suatu grup bebas. Dimisalkan m dan n bilangan kardinal dan $n \leq m$, maka F_m dapat disisipkan ke F_n. Akibatnya grup bebas dengan rank yang lebih besar dapat disisipkan ke dalam grup bebas dengan rank yang lebih kecil. Presentasi $< S|R >$ disebut presentasi berhingga jika himpunan S dan R merupakan himpunan berhingga. Suatu grup disebut sebagai dipresentasikan secara berhingga jika mempunyai setidaknya satu presentasi berhingga.

Kata-kata kunci: grup, grup bebas, himpunan pembangun bebas, presentasi grup, presentasi berhingga.

1. PENDAHULUAN

Dalam aljabar konsep grup merupakan salah satu konsep dasar. Grup merupakan suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma grup. Salah satu pembentukan grup yang cukup alamiah adalah pembentukan grup bebas. Jika diberikan sebarang himpunan tak kosong X, maka selalu dapat dikonstruksikan suatu grup yang memuat X dengan mendefinisikan suatu operasi biner perkalian juxtaposisi pada X. Grup inilah yang memotivasi pendefinisian dari grup bebas.

Dimisalkan G sebarang grup dan X subset G. Himpunan X dikatakan sebagai himpunan pembangun bebas jika setiap anggota dari G dapat dinyatakan secara tunggal sebagai perkalian anggota-anggota dari X. Suatu grup bebas didefinisikan sebagai grup yang memuat himpunan pembangun bebas. Selanjutnya, himpunan pembangun bebas disebut sebagai basis. Salah satu sifat pada grup bebas yang dibahas dalam penelitian ini adalah fakta bahwa sebarang grup merupakan grup faktor dari suatu grup bebas.

2. PEMBENTUKAN GRUP BEBAS

Definisi grup bebas tidak terlepas dari pembahasan mengenai himpunan pembangun bebas. Berikut akan dipaparkan pengertian dari himpunan pembangun bebas dari suatu grup.

Definisi 2.1. *Diberikan sebarang grup G dan subset tak kosong X dari G. Sebarang ekspresi yang berbentuk*

$$x_1^{i_1}x_2^{i_2}\dots x_n^{i_n}$$

disebut kata, dengan $x_j \in X$ dan $i_j \in \mathbb{Z}$. Setiap elemen dari X disebut leter. Selanjutnya, jika suatu kata tidak mempunyai leter, maka kata tersebut merupakan kata kosong dan dinotasikan dengan e.

Dimisalkan G merupakan grup dengan identitas e dan $X \subseteq G$. Dibentuk himpunan $X^{-1} = \left\{x^{-1} \mid x \in X\right\}$ dengan x^{-1} merupakan formal invers dari x. Diperhatikan bahwa himpunan $X \cup X^{-1}$ dapat disebut sebagai alfabet. Pada kasus ini, suatu formal invers x^{-1} dari $x \in X$ merupakan invers dari x di G. Setiap kata $w = x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}$ di X melambangkan suatu elemen tunggal dari G. Bentuk paling sederhana dari suatu kata merupakan pengertian dari kata tereduksi seperti pada definisi berikut.

Definisi 2.2. *Diberikan sebarang grup G dan subset tak kosong X dari G. Suatu kata w disebut sebagai kata tereduksi jika w adalah kata kosong atau $w = x_1^{i_1}x_2^{i_2}\dots x_n^{i_n}$, untuk $x_j \in X, i_j \in \mathbb{Z}, x_j \neq x_{j+1}$ dan $x_j \neq x_{j+1}^{-1}, j = 1, 2, \dots, n$.*

Berikut akan dijelaskan mengenai kesamaan dua kata tereduksi.

Definisi 2.3. [4] *Diberikan sebarang himpunan $X = \{x_i \mid i \in I\}$. Dua kata tereduksi $v = x_1^{i^1}x_2^{i_2}\dots x_n^{i_n}$ dan $w = y_1^{j^1}y_2^{j_2}\dots y_m^{j_m}$ dikatakan sama jika dan hanya jika $v = w = e$ atau $m = n$ dan $x_k = y_k, i_k = j_k$, untuk setiap $k = 1, 2, \dots, n$.*

Selanjutnya akan dipaparkan pengertian dari himpunan pembangun bebas dari suatu grup seperti pada definisi berikut.

Definisi 2.4. *Suatu subset $X \neq \emptyset$ dari grup G dengan elemen identitas e, disebut himpunan pembangun bebas dari G, jika untuk setiap $g \in G - \{e\}$ dapat dituliskan dengan tunggal sebagai*

$$g = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$$

dengan $n \in \mathbb{Z}^+$ berhingga dan $i_k \in \mathbb{Z}$.

Pada penelitian ini akan dibahas mengenai grup bebas dan sifat-sifatnya. Terlebih dahulu perlu dipahami definisi dari grup bebas.

Definisi 2.5. *Jika G grup dan memuat himpunan pembangun bebas X, maka G disebut grup bebas. Dengan kata lain, untuk setiap kata tak kosong tereduksi pada X mendefinisikan suatu elemen tak trivial pada G. Lebih lanjut, himpunan pembangun bebas X disebut sebagai basis dari G dan kardinalitas dari basis X disebut sebagai rank dari G.*

Dimisalkan X merupakan sebarang himpunan. Untuk mengkonstruksikan suatu grup bebas dengan basis X, perlu dideskripsikan suatu proses reduksi yang memperbolehkan mereduksi sebarang kata. Dimisalkan $w = uyy^{-1}v$. Suatu elemen tereduksi dari suatu kata w merupakan proses yang menghapus subkata yy^{-1}, dengan $y \in X \cup X^{-1} \cup \{e\}$ dari w, sehingga

$$uyy^{-1}v \longrightarrow uv.$$

Jika dipunyai proses

$$w \longrightarrow w_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow w_n$$

maka kata w_n merupakan bentuk reduksi dari w. Secara umum, terdapat langkahlangkah yang berbeda saat mereduksi suatu kata meskipun diperoleh hasil reduksi yang sama.

Lemma 2.6. *Setiap dua elemen tereduksi $w \longrightarrow w_1$ dan $w \longrightarrow w_2$ dari suatu kata w di S, terdapat suatu elemen tereduksi $w_1 \longrightarrow w_0$ dan $w_2 \longrightarrow w_0$, sedemikian sehinga berlaku*

$$\begin{tikzcd} & w \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ w_1 \arrow[dr] & & w_2 \arrow[dl] \\ & w_0 & \end{tikzcd}$$

Bukti. Dimisalkan $\lambda_1 : w \longrightarrow w_1$ dan $\lambda_2 : w \longrightarrow w_2$ merupakan elemen tereduksi dari suatu kata w. Dalam hal ini dapat dibagi menjadi dua kasus.

(1) Reduksi disjoin

Pada kasus ini, dimisalkan $w = u_1 y_1 y_1^{-1} u_2 y_2 y_2^{-1} u_3$, dengan $y_i \in S \cup S^{-1} \cup \{e\}$. Dimisalkan λ_i merupakan kata elementer yang menghapus subkata $y_i y_i^{-1}$, untuk $i = 1, 2$. Maka diperoleh

$$w \xrightarrow{\lambda_1} u_1 u_2 y_2 y_2^{-1} u_3 \xrightarrow{\lambda_2} u_1 u_2 u_3$$
$$w \xrightarrow{\lambda_2} u_1 y_1 y_1^{-1} u_2 u_3 \xrightarrow{\lambda_1} u_1 u_2 u_3.$$

Dengan demikian, lema terbukti.

(2) Reduksi overlapping

Pada kasus ini, dimisalkan $w = u_1 y y^{-1} y u_2$. Maka diperoleh

$$w = u_1 y \left(y^{-1} y\right) u_2 \xrightarrow{\lambda_2} u_1 y u_2,$$
$$w = u_1 \left(y y^{-1}\right) y u_2 \xrightarrow{\lambda_1} u_1 y u_2;$$

Dengan demikian, lema terbukti.

□

Proposisi selanjutnya akan menunjukkan bahwa jika diberikan suatu kata dan dua langkah reduksi yang berbeda pada kata tersebut, maka kata tersebut mempunyai hasil bentuk reduksi yang sama.

Proposisi 2.7. *Dimisalkan w merupakan kata di S. Sebarang dua reduksi dari w, yaitu:*

- $w \longrightarrow w'_0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow w'_n$
- $w \longrightarrow w''_0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow w''_m$

mempunyai hasil dari bentuk reduksi yang sama yaitu $w'_n = w''_m$. Dengan kata lain, suatu kata w merepresentasikan suatu elemen trivial jika dan hanya jika bentuk kata tereduksi dari w adalah kata kosong.

Bukti. Pembuktian ini menggunakan induksi matematika pada $|w|$.

Jika $|w| = 0$, maka w tereduksi, sehingga terbukti.

Akan ditunjukkan proposisi terbukti benar untuk $|w| > 1$. Dengan menggunakan Lema 2.6, terdapat elemen tereduksi $w'_0 \longrightarrow w_0$ dan $w''_0 \longrightarrow w_0$. Dimisalkan untuk kata w_0, dipunyai proses reduksi $w_0 \longrightarrow w_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow w_k$. Diperoleh

$$\begin{array}{ccccc}
 & & w & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 & w'_0 & & w''_0 & \\
\swarrow & \searrow & & \swarrow & \searrow \\
w'_1 & & w_0 & & w''_1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\cdots & & w_1 & & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
w'_n & & \cdots & & w''_m \\
 & & \downarrow & & \\
 & & w_k & &
\end{array}$$

Dengan menggunakan induksi hipotesis, semua bentuk reduksi dari kata w_0' sama, yaitu $w_n' = w_k$. Lebih lanjut, $w_k = w_m''$. Akibatnya $w_n' = w_k = w_m''$. Terbukti. $\square$

Dimisalkan G grup bebas dengan X himpunan pembangun bebas dari G. Didefinisikan operasi perkalian juxtaposisi pada G yaitu untuk setiap $a = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}, b = y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots y_n^{j_m} \in G$ dengan $x_p, y_q \in X, i_p, j_q \in \mathbb{Z}, p = 1, 2, \dots, n, q = 1, 2, \dots, m$ diperoleh

$$ab = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots y_n^{j_m}.$$

Diperhatikan bahwa suatu hasil dari perkalian juxtaposisi dua kata selalu dapat direduksi. Berikut akan diberikan teorema yang mengatakan bahwa sebarang himpunan tak kosong selalu dapat membentuk suatu grup bebas.

Teorema 2.8. *Jika diberikan sebarang himpunan tak kosong X, maka terdapat suatu grup bebas $F(X)$ sedemikian sehingga X adalah himpunan pembangun bebas dari $F(X)$.*

Bukti. Dimisalkan $X = \{a_j \mid j \in I\}$. Dibentuk himpunan X^{-1} yang saling asing dengan X dan $|X| = \left|X^{-1}\right|$. Artinya terdapat pemetaan $f : X \to X^{-1}$ bijektif dengan definisi $f(a) = a^{-1}$, untuk setiap $a \in X$. Dibentuk pula himpunan $\{e\}$ dengan $e \notin X \cup X^{-1}$. Didefinisikan operasi perkalian juxtaposisi pada $X \cup X^{-1} \cup \{e\}$ dengan $a^{-1} = e, a^{-1}a = e, \left(a^{-1}\right)^{-1} = a$, untuk setiap $a \in X, a^{-1} \in X^{-1}$. Dimisalkan $F(X)$ adalah himpunan semua hasil perkalian juxtaposisi dari $X \cup X^{-1} \cup \{e\}$. Diperoleh

$$\begin{aligned}
F(X) &= \{b_1^{p_1} b_2^{p_2} \dots b_n^{p_n} \mid b_k \in X \cup X^{-1} \cup \{e\}, p_k \in \mathbb{Z}, k = 1, 2, \dots, n\} \\
&= \left\{ \left(a_1^{j_1}\right)^{p_1} \left(a_2^{j_2}\right)^{p_2} \dots \left(a_n^{j_n}\right)^{p_n} \mid b_k = a_k^{j_k} \in X \cup X^{-1} \cup \{e\}, a_k \in X, p_k \in \mathbb{Z}, k = 1, 2, \dots, n \right\} \\
&= \left\{ a_1^{j_1 p_1} a_2^{j_2 p_2} \dots a_n^{j_n p_n} \mid a_k \in X, j_k p_k \in \mathbb{Z}, k = 1, 2, \dots, n \right\} \\
&= \left\{ a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n} \mid a \in X, i_k = j_k p_k \in \mathbb{Z}, k = 1, 2, \dots, n \right\} \\
&= < X >
\end{aligned}$$

Didefiniskan operasi perkalian juxtaposisi pada $F(X)$, yaitu untuk setiap $v = a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n}$ $w = yb_1^{j_1} b_2^{j_2} \dots b_m^{j_m} \in F(X)$ berlaku

$$vw = \left(a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n}\right) \left(b_1^{j_1} b_2^{j_2} \dots b_m^{j_m}\right)$$

Akan ditunjukkan operasi perkalian juxtaposisi pada $F(X)$ terdefinisi dengan baik. Diambil sebarang $a = a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n}, b = b_1^{q_1} b_2^{q_2} \dots b_m^{q_m}, c = c_1^{r_1} c_2^{r_2} \dots c_n^{r_n}, d = d_1^{s_1} d_2^{s_2} \dots d_m^{s_m} \in F(X)$ dengan $a = c$ dan $b = d$. Artinya $a_i = c_i, p_i = r_i$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$ dan $b_j = d_j, q_j = s_j$ untuk setiap $j = 1, 2, \dots, m$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
ab &= (a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n}) (b_1^{q_1} b_2^{q_2} \dots b_m^{q_m}) \\
&= a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n} b_1^{q_1} b_2^{q_2} \dots b_m^{q_m} \\
&= c_1^{r_1} c_2^{r_2} \dots c_n^{r_n} d_1^{s_1} d_2^{s_2} \dots d_m^{s_m} \\
&= (c_1^{r_1} c_2^{r_2} \dots c_n^{r_n}) (d_1^{s_1} d_2^{s_2} \dots d_m^{s_m}) \\
&= cd
\end{aligned}$$

Jadi, operasi tersebut terdefinisi dengan baik.
Akan ditunjukkan operasi perkalian juxtaposisi pada $F(X)$ bersifat asosiatif. Diambil sebarang
$a = a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n}, b = b_1^{q_1} b_2^{q_2} \ldots b_m^{q_m}, c = c_1^{r_1} c_2^{r_2} \ldots c_n^{r_n} \in F(X)$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a \cdot (b.c) &= (a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n}) \cdot ((b_1^{q_1} b_2^{q_2} \ldots b_m^{q_m}) \cdot (c_1^{r_1} c_2^{r_2} \ldots c_n^{r_n})) \\ &= (a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n}) \cdot (b_1^{q_1} b_2^{q_2} \ldots b_m^{q_m} c_1^{r_1} c_2^{r_2} \ldots c_n^{r_n}) \\ &= a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n} b_1^{q_1} b_2^{q_2} \ldots b_m^{q_m} c_1^{r_1} c_2^{r_2} \ldots c_n^{r_n} \\ &= ((a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n}) (b_1^{q_1} b_2^{q_2} \ldots b_m^{q_m})) (c_1^{r_1} c_2^{r_2} \ldots c_n^{r_n}) \\ &= (ab)c \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa operasi tersebut bersifat asosiatif. Selanjutnya akan ditunjukkan e merupakan elemen identitas pada $F(X)$. Diambil sebarang $a = a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n} \in F(X)$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} ae &= (a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n})\, e \\ &= a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n} e \\ &= a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n} \\ &= a \\ &= a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n} \\ &= e a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n} \\ &= e\,(a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n}) \\ &= ea \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa elemen e merupakan elemen identitas pada $F(X)$. Selanjutnya akan ditunjukkan setiap elemen pada $F(X)$ mempunyai invers. Diambil sebarang
$a = a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n} \in F(X)$. Dipilih $a^{-1} = a_n^{-p_n} \ldots a_2^{-p_2} a_1^{-p_1} \in F(X)$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} aa^{-1} &= (a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n}) \left(a_n^{-p_n} \ldots a_2^{-p_2} a_1^{-p_1}\right) \\ &= a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n} a_n^{-p_n} \ldots a_2^{-p_2} a_1^{-p_1} \\ &= e \\ &= a_n^{-p_n} \ldots a_2^{-p_2} a_1^{-p_1} a_n^{-p_n} \ldots a_2^{-p_2} a_1^{-p_1} \\ &= \left(a_n^{-p_n} \ldots a_2^{-p_2} a_1^{-p_1}\right) \cdot \left(a_n^{-p_n} \ldots a_2^{-p_2} a_1^{-p_1}\right) \\ &= a^{-1} a \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa setiap elemen pada $F(X)$ mempunyai invers. Dengan demikian, terbukti bahwa $F(X)$ merupakan grup.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa X adalah himpunan pembangun bebas dari $F(X)$. Diambil sebarang $a = a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n} \in F(X) - \{e\}$ dengan $a_k \in X, p_k \in \mathbb{Z}, k = 1, 2, \ldots, n$. Akan ditunjukkan ekspresi dari a tunggal. Andaikan terdapat $b_j \in X, q_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, \ldots, m$ sehingga $b_1^{q_1} b_2^{q_2} \ldots b_m^{q_m}$ yang merupakan ekspresi lain dari a. Berdasarkan Definisi 2.3, diperoleh $m = n$ dan $a_k = b_k, p_k = q_k$, untuk setiap $k = 1, 2, \ldots, n$. Dengan kata lain, ekspresi dari a tunggal. Jadi, himpunan X merupakan himpunan pembangun bebas dari $F(X)$. $\square$

Setelah memahami definisi dari kata tereduksi, berikut ini akan diperkenalkan definisi dari kata tereduksi siklis.

Definisi 2.9. *Dimisalkan $w = y_1 y_2 \ldots y_n$ merupakan kata pada alfabet $S \cup S^{-1}$. Kata w disebut kata tereduksi siklis jika w kata tereduksi dan $y_n \neq y_1^{-1}$.*

Berikut ini akan diberikan lema yang menunjukkan bahwa sebarang pasangan kata pada suatu grup bebas mendefinisikan elemen konjugat pada grup bebas tersebut.

Lemma 2.10. *Diberikan sebarang himpunan S. Sebarang dua kata $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ di alfabet $S \cup S^{-1}$ akan saling konjugat di $F(S)$ jika dan hanya jika bentuk kata tereduksi siklis dari $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ juga saling konjugat di $F(S)$.*

Bukti. Dimisalkan $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ merupakan dua kata di alfabet $S \cup S^{-1}$. Dimisalkan terdapat u dan v merupakan bentuk dari kata tereduksi siklis dari $\bar{u}$ dan $\bar{v}$, sedemikian sehingga $\bar{u} = g_u u g_u^{-1}$ dan $\bar{v} = g_v v g_v^{-1}$, untuk suatu $g_u, g_v \in F(S)$. Akibatnya, $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ merepresentasikan elemen konjugat di $F(S)$ jika dan hanya jika u dan v konjugat di $F(S)$. Diperoleh

$$\begin{aligned} &\bar{u} = g\bar{v}g^{-1} \\ \Leftrightarrow &g_u u g_u^{-1} = g g_v v g_v^{-1} g^{-1} \\ \Leftrightarrow &u = \left(g_u^{-1} g g_v\right) v \left(g_u^{-1} g g_v\right)^{-1} \end{aligned}$$

Diasumsikan elemen $u = y_1 \ldots y_n$ dan $v = z_1 \ldots z_m$ sebagai bentuk reduksi siklis dan bentuk reduksi tersebut berbeda yaitu $y_1 \ldots y_n \neq z_1 \ldots z_m$ (karena jika sama, maka u dan v saling konjugat dengan elemen trivial).

Diasumsikan bahwa u dan v saling konjugat di $F(S)$. Dilain pihak, diasumsikan bahwa terdapat kata tereduksi $g' = s_1 \ldots s_k$ sehingga

$$y_1 \ldots y_n = s_1 \ldots s_k z_1 \ldots z_m s_k^{-1} \ldots s_1^{-1}$$

Dua elemen di $F(S)$ dikatakan sama jika dan hanya jika bentuk reduksi dari keduanya sama. Karena $y_1 \ldots y_n$ merupakan kata tereduksi siklis, maka kata di sisi kanan tidak tereduksi. Maka haruslah $s_k^{-1} = z_1$ atau $s_k = z_m$. Tanpa mengurangi keumuman, dapat diasumsikan bahwa $s_k = z_1^{-1}$, sehingga dapat dieliminasi pasangan $s_k z_1$ dengan suatu elemen reduksi. Jika $k = 1$, maka $s_1^{-1} = z_1$ sehingga dipunyai

$$\begin{aligned} y_1 \ldots y_n = s_1 z_1 z_2 \ldots z_m s_1^{-1} = s_1 s_1^{-1} z_2 \ldots z_m s_1^{-1} &= z_2 \ldots z_m s_1^{-1} \\ &= z_2 \ldots z_m z_1 \end{aligned}$$

Akibatnya $y_1 \ldots y_n$ diperoleh dari $z_1 \ldots z_m$ dengan menggunakan permutasi siklis pada leter. Karena $z_1 \ldots z_m$ tereduksi siklis, maka setiap permutasi siklisnya juga tereduksi. Secara umum, $y_1 \ldots y_n$ dan $z_2 \ldots z_m z_1$ merupakan bentuk tereduksi dari elemen yang sama di $F(S)$. Untuk $k > 1$, dengan meneruskan proses induksi dengan panjang k dari elemen konjugasi, cukup diamati bahwa

$$\begin{aligned} y_1 \dots y_n &= s_1 \dots s_{k-1} s_k z_1 \dots z_m s_k^{-1} s_{k-1}^{-1} \dots s_1^{-1} \\ &= s_1 \dots s_{k-1} z_2 \dots z_m z_1 s_{k-1}^{-1} \dots s_1^{-1} \end{aligned}$$

dengan $z_2 \dots z_m z_1$ merupakan permutasi siklis dari $z_1 \dots z_m$. □

3. PEMETAAN UNIVERSAL PADA GRUP BEBAS

Setelah memahami grup bebas beserta contohnya pada subbab sebelumnya, selanjutnya akan diberikan beberapa karakteristik dari grup bebas. Terlebih dahulu akan diberikan sifat pemetaan universal grup bebas seperti pada teorema di bawah ini.

Teorema 3.1. *Diberikan F grup bebas yang dibangun oleh X dan $i : X \to F$ pemetaan inklusi. Jika G sebarang grup dan $f : X \to G$ sebarang fungsi, maka terdapat dengan tunggal homomorfisma $\psi : F \to G$ sehingga $\psi \circ i = f$.*

Bukti. Diketahui F grup bebas yang dibangun oleh X. Diambil sebarang grup G dan sebarang fungsi $f : X \to G$. Dibentuk pengaitan $\psi : F \to G$ dengan $\psi\left(x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}\right) = f(x_1)^{i_1} \dots f(x_n)^{i_n}$, untuk setiap $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \in F, x_k \in X, i_k \in \mathbb{Z}, k = 1, 2, \dots, n$.
Akan ditunjukkan ψ fungsi. Diambil sebarang $v = x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}, w = y_1^{j_1} \dots y_m^{j_m} \in F$ dengan $v = w$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} v &= w \\ x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} &= y_1^{j_1} \dots y_m^{j_m} \\ x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} &= y_1^{j_1} \dots y_n^{j_n} \end{aligned}$$

Diperoleh $x_k = y_k$ dan $i_k = j_k, \forall x_k, y_k \in X, i_k, j_k \in \mathbb{Z}, k = 1, 2, \dots, n$. Akibatnya

$$\begin{aligned} \psi(v) &= \psi\left(x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}\right) \\ &= f(x_1)^{i_1} \dots f(x_n)^{i_n} \\ &= f(y_1)^{i_1} \dots f(y_n)^{i_n} \\ &= f(y_1)^{j_1} \dots f(y_n)^{j_n} \\ &= \psi\left(y_1^{j_1} \dots y_n^{j_n}\right) \\ &= \psi(w). \end{aligned}$$

Jadi, ψ fungsi.
Akan ditunjukkan ψ homomorfisma grup. Diambil sebarang $v = x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}, w = y_1^{j_1} \dots y_m^{j_m} \in$ F.

Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\psi(vw) &= \psi\left(x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n} y_1^{j_1}\dots y_m^{j_m}\right)\\ &= f\left(x_1\right)^{i_1}\dots f\left(x_n\right)^{i_n} f\left(y_1\right)^{j_1}\dots f\left(y_m\right)^{j_m}\\ &= \psi\left(x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}\right)\psi\left(y_1^{j_1}\dots y_m^{j_m}\right)\\ &= \psi(v)\psi(w)\end{aligned}$$

Jadi, ψ homomorfisma grup.
Akan ditunjukkan $\psi \circ i = f$. Diambil sebarang $x \in X$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(\psi \circ i)(x) &= \psi(i(x))\\ &= \psi(x)\\ &= f(x)\end{aligned}$$

Akan ditunjukkan ψ tunggal. Andaikan ada homomorfisma $g : F \to G$ dengan $g \circ i = f$. Diambil sebarang $v = x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n} \in F$. Diperhatikan

$$\begin{aligned}g(v) &= g\left(x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}\right)\\ &= g\left(x_1^{i_1}\right)\dots g\left(x_n^{i_n}\right)\\ &= g\left(x_1\right)^{i_1}\dots g\left(x_n\right)^{i_n}\\ &= g\left(i\left(x_1\right)\right)^{i_1}\dots g\left(i\left(x_n\right)\right)^{i_n}\\ &= (g \circ i)\left(x_1\right))^{i_1}\dots (g \circ i)\left(x_n\right)\Big)^{i_n}\\ &= f\left(x_1\right)^{i_1}\dots f\left(x_n\right)^{i_n}\\ &= \psi\left(x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}\right)\\ &= \psi(v)\end{aligned}$$

Jadi, ψ tunggal. □

Berdasarkan Teorema 3.1, diperoleh akibat sebagai berikut.

Akibat 3.2. *Diberikan G grup yang dibangun oleh $S \subseteq G$. Grup G merupakan grup bebas yang dibangun oleh S jika dan hanya jika G memenuhi sifat pemetaan universal grup bebas. Setiap pemetaan $\phi : S \to H$ dengan H adalah sebarang grup, maka dapat diperluas menjadi suatu homomorfisma tunggal $\bar{\phi} : G \to H$ seperti pada diagram berikut.*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\phi"'] & G \arrow[d, "\tilde{\phi}"] \\ & H \end{tikzcd}$$

Bukti. Dimisalkan G merupakan grup bebas yang dibangun oleh S dan dimisalkan $\phi : S \to H$ merupakan fungsi dari S ke sebarang grup H. Karena G dibangun secara bebas oleh S, maka setiap elemen $g \in G$ dapat didefinisikan sebagai suatu kata tereduksi tunggal di $S \cup S^{-1} \cup \{e\}$. Dimisalkan

$$g = s_{i_1}^{e_1} \dots s_{i_n}^{e_n} \left(s_{i_j} \in S, e_i \in \mathbb{Z}\right)$$

Didefinisikan

$$\bar{\phi}(g) = \left(\phi\left(s_{i_1}\right)\right)^{e_1} \dots \left(\phi\left(s_{i_n}\right)\right)^{e_n}.$$

Akan ditunjukkan bahwa $\bar{\phi}$ merupakan homomorfisma grup. Diambil sebarang $g, h \in G$ sedemikian sehingga $g = y_1 \dots y_n z_1 \dots z_m$ dan $h = z_m^{-1} \dots z_1^{-1} y_{n+1} \dots y_k$ merupakan kata tereduksi yang saling berkorespondensi di S, dengan $y_i, z_j \in S \cup S^{-} \cup \{e\}$ dan $y_n \neq y_{n+1}^{-1}$. Akibatnya $gh = y_1 \dots y_n y_{n+1} \dots y_k$ merupakan kata tereduksi di S yang merepresentasikan elemen gh. Diperoleh

$$\begin{aligned}
\bar{\phi} &= \bar{\phi}\left(y_1\right) \dots \bar{\phi}\left(y_n\right) \bar{\phi}\left(y_{n+1}\right) \dots \bar{\phi}\left(y_k\right) \\
&= \bar{\phi}\left(y_1\right) \dots \bar{\phi}\left(y_n\right) \bar{\phi}\left(z_1\right) \dots \bar{\phi}\left(z_m\right) \bar{\phi}\left(z_m\right)^{-1} \dots \bar{\phi}\left(z_1\right)^{-1} \bar{\phi}\left(y_{n+1}\right) \dots \bar{\phi}\left(y_k\right) \\
&= \bar{\phi}(g) \bar{\phi}(h)
\end{aligned}$$

Jadi, $\bar{\phi}$ merupakan homomorfisma grup. Diperhatikan bahwa $\bar{\phi}$ merupakan perluasan dari ϕ dan berkorespondensi pada diagram komutatif sehingga $\bar{\phi}$ tunggal. Hal ini menunjukkan G memenuhi keperluan sifat pemetaan universal.

Dimisalkan bahwa grup G yang dibangun oleh S memenuhi sifat pemetaan universal. Dipilih $H = F(S)$ dan didefinisikan suatu pemeetaan $\phi : S \to H$ dengan $\phi(s) = s$, untuk setiap $s \in S$. Berdasarkan sifat pemetaan universal, pemetaan ϕ dapat diperluas menjadi suatu homomorisma tunggal $\bar{\phi} : G \to F(S)$. Dimisalkan w merupakan kata tak kosong tereduksi di S. Artinya, w merepresentasikan suatu elemen $g \in G$ sehingga $\bar{\phi}(g) = w \in F(S)$. Karena $\bar{\phi}(g) \neq 1$ maka $g \neq 1$ di G. Jadi, G merupakan grup bebas yang dibangun oleh S. □

4. SIFAT-SIFAT PADA GRUP BEBAS

Pada subbab ini akan menjelaskan beberapa karakterisasi dari grup bebas.

Teorema 4.1. *([Rotman (1995)]:345) Setiap grup isomorfis dengan grup faktor dari suatu grup bebas.*

Bukti. Dimisalkan G sebarang grup. Dibentuk $X = \{x_g \mid g \in G\}$. Didefinisikan fungsi $f : X \to G$ dengan $f\left(x_g\right) = g$, untuk setiap $x_g \in X$. Diperhatikan bahwa f pemetaan bijektif. Dimisalkan F grup bebas yang dibangun oleh X. Berdasarkan Teorema 3.1, terdapat dengan tunggal $\psi : F \to G$ homomorfisma grup sedemikian sehingga $\psi \circ i = f$ dengan $\psi\left(x_{g_1}^{i_1} \dots x_{g_n}^{i_n}\right) = f\left(x_{g_1}\right)^{i_1} \dots f\left(x_{g_n}\right)^{i_n}$, untuk setiap $x_{g_1}^{i_1} \dots x_{g_n}^{i_n} \in F$.
Akan ditunjukkan $\operatorname{Im}(\psi) = G$. Jelas bahwa $\operatorname{Im}(\psi) \subseteq G$. Selanjutnya diambil sebarang $g \in G$. Karena $f : X \to G$ fungsi bijektif, maka terdapat $x_g \in X$ sehingga $g = f\left(x_g\right) = \psi \circ i\left(x_g\right) = \psi\left(i\left(x_g\right)\right) = \psi\left(x_g\right)$. Diperoleh $G \subseteq \operatorname{Im}(\psi)$. Dengan kata lain, $\operatorname{Im}(\psi) = G$. Jadi, ψ merupakan epimorfisma grup. Karena $\psi : F \to G$ epimorfisma grup, maka berdasarkan teorema isomorfisma pertama, diperoleh $F/\ker(\psi) \cong G$. □

Jika diberikan himpunan yang beranggotakan satu elemen, maka grup bebas yang terbentuk akan isomorfis dengan grup $\mathbb{Z}$.

Akibat 4.2. *Jika* $X = \{x\}$, *maka* $F(X) \cong \mathbb{Z}$.

Bukti. Diberikan $X = \{x\}$. Akan ditunjukkan $F(X) \cong \mathbb{Z}$.
Dibentuk $\psi : \mathbb{Z} \to F(X)$ dengan $\psi(1^p) = x^p$, untuk setiap $p \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan ψ merupakan fungsi. Diambil sebarang $1^p, 1^q \in \mathbb{Z}$ dengan $p = q$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\psi(1^p) &= x^p \\ &= x^q \\ &= \psi(1^q)\end{aligned}$$

Jadi, ψ merupakan fungsi.
Akan ditunjukkan ψ homomorfisma. Diambil sebarang $p, q \in \mathbb{Z}$. Diperhatikan

$$\begin{aligned}\psi(1^p.1^q) &= \psi\left(1^{p+q}\right) \\ &= x^{p+q} \\ &= x^p x^q \\ &= \psi(1^p)\,\psi(1^q)\end{aligned}$$

Jadi, ψ merupakan homomorfisma grup.
Akan ditunjukkan ψ monomorfisma. Diambil sebarang $1^p, 1^q \in G$ dengan $\psi(1^p) = \psi(1^q)$. Diperhatikan

$$\begin{aligned}\psi(1^p) &= \psi(1^q) \\ x^p &= x^q \\ p &= q\end{aligned}$$

Jadi, ψ merupakan monomorfisma grup.
Akan ditunjukkan ψ epimorfisma. Diambil sebarang $x^j \in F(X)$, untuk suatu $j \in \mathbb{Z}$. Diperhatikan bahwa terdapat $j \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $\psi\left(1^j\right) = x^j$. Jadi, ψ merupakan epimorfisma grup.
Dengan kata lain, $\mathbb{Z} \cong F(X)$. □

Jika sebarang grup bebas dengan rank n, maka sebarang basis dari grup bebas tersebut memiliki kardinalitas yang sama yaitu n.

Teorema 4.3. [1] *Jika G grup bebas komutatif dengan basis $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, maka n ditentukan oleh G secara tunggal. Selanjutnya G disebut grup bebas komutatif dengan rank n.*

Bukti. Diketahui G merupakan grup bebas yang dibangun oleh $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Dapat dipilih grup $\mathbb{Z}_2$ sedemikian sehingga untuk sebarang fungsi $f : B \to \mathbb{Z}_2$, terdapat dengan tunggal hohomorfisma $\varphi : G \to \mathbb{Z}_2$. Diperoleh sebanyak $\left|2^B\right| = 2^n$ homomorfisma yang berbeda dari G ke $\mathbb{Z}_2$. Dimisalkan C merupakan basis lain dari G, maka dapat dipilih grup $\mathbb{Z}_2$ sedemikian sehingga untuk sebarang fungsi $g : C \to \mathbb{Z}_2$, terdapat dengan tunggal hohomorfisma $\phi : G \to \mathbb{Z}_2$. Diperoleh sebanyak $\left|2^C\right|$ homomorfisma yang berbeda dari G ke $\mathbb{Z}_2$. Akibatnya $\left|2^B\right| = 2^n = \left|2^C\right|$. Diperoleh $|B| = |C| = n$. □

Berdasarkan Teorema 4.3, diperoleh akibat sebagai berikut.

Akibat 4.4. [1] *Sebarang dua basis dari suatu grup bebas komutatif mempunyai kardinalitas yang sama.*

Bukti. Dimisalkan F merupakan grup bebas dengan basis X dan Y. Karena F grup bebas yang dibangun oleh X, maka dapat dipilih grup $\mathbb{Z}_2$ sedemikian sehingga untuk sebarang fungsi $f : X \to \mathbb{Z}_2$, terdapat dengan tunggal hohomorfisma $\varphi : F \to \mathbb{Z}_2$. Diperoleh sebanyak $\left|2^X\right|$ homomorfisma yang berbeda dari F ke $\mathbb{Z}_2$. Karena F grup bebas yang dibangun oleh Y, maka dapat dipilih grup $\mathbb{Z}_2$ sedemikian sehingga untuk sebarang fungsi $g : Y \to \mathbb{Z}_2$, terdapat dengan tunggal hohomorfisma $\phi : F \to \mathbb{Z}_2$. Diperoleh sebanyak $\left|2^Y\right|$ homomorfisma yang berbeda dari F ke $\mathbb{Z}_2$. Akibatnya $\left|2^X\right| = \left|2^Y\right|$. Jelas bahwa $|X| < \left|2^X\right| = \left|2^Y\right|$ dan $|Y| < \left|2^X\right| = \left|2^Y\right|$. Andaikan $|X| < |Y|$. Diperoleh $|X| < |Y| < \left|2^X\right|$. Berdasarkan asumsi Generalized Continuum Hypothesis (GCH) yaitu untuk setiap himpunan X, tidak ada himpunan S sedemikian sehingga $|X| < |S| < \left|2^X\right|$, terjadi kontradiksi. Sebaliknya, andaikan $|Y| < |X|$. Diperoleh $|Y| < |X| < \left|2^Y\right|$. Berdasarkan asumsi tersebut, terjadi kontradiksi. Dengan demikian, $|X| = |Y|$. □

Selanjutnya akan dipaparkan suatu teorema mengenai syarat perlu dan cukup sebarang dua grup bebas yang isomorfis memiliki kardinalitas himpunan pembangun bebas yang sama.

Teorema 4.5. [8] *Dimisalkan F dan G merupakan grup bebas yang masing-masing dibangun oleh X dan Y. Akibatnya $F \cong G$ jika dan hanya jika $|X| = |Y|$.*

Bukti. ($\Leftarrow$)
Dimisalkan F dan G grup bebas yang masing-masing dibangun oleh X dan Y. Diketahui $|X| = |Y|$. Akan ditunjukkan $F \cong G$. Karena $|X| = |Y|$, maka terdapat suatu fungsi bijektif $k : X \to Y$.
Karena F grup bebas yang dibangun oleh X maka terdapat pemetaan inklusi $i_X : X \to F$. Karena G grup bebas yang dibangun oleh Y maka terdapat pemetaan inklusi $i_Y : Y \to G$.
Dipilih grup G dan fungsi $i_Y \circ k : X \to G$. Dari Teorema 3.1, terdapat dengan tunggal suatu $\phi : F \to G$ homomorfisma grup dengan definisi

$$\phi\left(x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}\right) = i_Y \circ k\left(x_1\right)^{i_1} i_Y \circ k\left(x_2\right)^{i_2} \ldots i_Y \circ k\left(x_n\right)^{i_n},$$

untuk setiap $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n} \in F$. Akan ditunjukkan homomorfisma ϕ bersifat injektif. Diambil sebarang

$$x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}, y_1^{j_1} y_2^{j_2} \ldots y_m^{j_m} \in F$$

dengan $\phi\left(x_1^{i_1}x_2^{i_2}\dots x_n^{i_n}\right)=\phi\left(y_1^{j_1}y_2^{j_2}\dots y_m^{j_m}\right)$. Akan ditunjukkan $x_1^{i_1}x_2^{i_2}\dots x_n^{i_n}=y_1^{j_1}y_2^{j_2}\dots y_m^{j_m}$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
&\phi\left(x_1^{i_1}x_2^{i_2}\dots x_n^{i_n}\right)=\phi\left(y_1^{j_1}y_2^{j_2}\dots y_m^{j_m}\right)\\
&\Leftrightarrow i_Y\circ k\left(x_1\right)^{i_1} i_Y\circ k\left(x_2\right)^{i_2}\dots i_Y\circ k\left(x_n\right)^{i_n}=i_Y\circ k\left(y_1\right)^{j_1} i_Y\circ k\left(y_2\right)^{j_2}\dots i_Y\circ k\left(y_m\right)^{j_m}\\
&\Leftrightarrow k\left(x_1\right)^{i_1} k\left(x_2\right)^{i_2}\dots k\left(x_n\right)^{i_n}=k\left(y_1\right)^{j_1} k\left(y_2\right)^{j_2}\dots k\left(y_m\right)^{j_m}\\
&\Leftrightarrow m=n\wedge k\left(x_p\right)=k\left(y_p\right)\wedge i_p=j_p,\forall p=1,2,\dots,n\\
&\Leftrightarrow m=n\wedge x_p=y_p\wedge i_p=j_p,\forall p=1,2,\dots,n\\
&\Leftrightarrow x_1^{i_1}x_2^{i_2}\dots x_n^{i_n}=y_1^{j_1}y_2^{j_2}\dots y_m^{j_m}.
\end{aligned}$$

Jadi,homomorfisma ϕ bersifat injektif. Akan ditunjukkan homomorfisma ϕ bersifat surjektif. Diambil sebarang $b\in G$ dengan $b=b_1^{j_1}b_2^{j_2}\dots b_m^{j_m}$, untuk suatu $b_p\in Y, j_p\in\mathbb{Z}, p=1,2,\dots,m$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
b&=b_1^{j_1}b_2^{j_2}\dots b_m^{j_m}\\
&=k\left(x_1\right)^{j_1} k\left(x_2\right)^{j_2}\dots k\left(x_m\right)^{j_m},\ \text{untuk suatu } x_p\in X, p=1,2,\dots,m\\
&=i_Y\circ k\left(x_1\right)^{j_1} i_Y\circ k\left(x_2\right)^{j_2}\dots i_Y\circ k\left(x_m\right)^{j_m}\\
&=\phi\left(x_1^{j_1}x_2^{j_2}\dots x_m^{j_m}\right),\ \text{dengan } x_1^{j_1}x_2^{j_2}\dots x_m^{j_m}\in F
\end{aligned}$$

Jadi, homomorfisma ϕ bersifat surjektif. Dengan kata lain $F\cong G$.
$(\Rightarrow)$
Diketahui $F\cong G$. Akan ditunjukkan $|X|=|Y|$. Diketahui F merupakan grup bebas yang dibangun oleh X. Dapat dipilih grup $\mathbb{Z}_2$ sedemikian sehingga untuk sebarang fungsi $f: X\to\mathbb{Z}_2$, terdapat dengan tunggal hohomorfisma $\varphi: F\to\mathbb{Z}_2$. Diperoleh sebanyak $\left|2^X\right|$ homomorfisma yang berbeda dari F ke $\mathbb{Z}_2$. Karena $F\cong G$, maka banyaknya homomorfisma yang berbeda dari F ke $\mathbb{Z}_2$ sama dengan banyaknya homomorfisma yang berbeda dari G ke $\mathbb{Z}_2$ yaitu $\left|2^X\right|=\left|2^Y\right|$. Jelas bahwa $|X|<\left|2^X\right|=\left|2^Y\right|$ dan $|Y|<\left|2^X\right|=\left|2^Y\right|$. Andaikan $|X|<|Y|$. Diperoleh $|X|<|Y|<\left|2^X\right|$. Berdasarkan asumsi Generalized Continuum Hypothesis (GCH) yaitu untuk setiap himpunan X, tidak ada himpunan S sedemikian sehingga $|X|<|S|<\left|2^X\right|$, terjadi kontradiksi. Sebaliknya, andaikan $|Y|<|X|$. Diperoleh $|Y|<|X|<\left|2^Y\right|$. Berdasarkan asumsi tersebut, terjadi kontradiksi. Dengan demikian, $|X|=|Y|$. □

5. PENYISIPAN PADA GRUP BEBAS

Beberapa referensi menuliskan grup bebas dengan rank n sebagai F_n. Dimisalkan $F(Y)$ grup bebas yang dibangun oleh Y dan suatu $S\subseteq Y$, maka subgrup $\langle S\rangle$ dibangun oleh S di $F(Y)$, merupakan grup bebas dengan basis S. Hal ini menunjukkan jika m dan n bilangan kardinal dan $n\leq m$, maka F_m dapat disisipkan ke F_n. Akibatnya grup bebas dengan rank yang lebih besar dapat disisipkan kedalam grup bebas dengan rank yang lebih kecil. Terlebih dahulu ini akan diberikan definisi mengenai penyisipan pada suatu grup.

Definisi 5.1. *Suatu grup G disisipkan kedalam grup H, jika terdapat suatu monomorfisma $\phi : G \to H$. Jika $\phi(G) \subsetneq H$, maka dapat dikatakan G dapat disisipkan sejati ke H dan ϕ merupakan penyisipan sejati.*

Selanjutnya akan dibahas mengenai suatu proposisi yang menunjukkan bahwa sebarang grup bebas terhitung dapat disisipkan kedalam suatu grup bebas dengan rank 2.

Proposisi 5.2. *Sebarang grup bebas terhitung G dapat disisipkan kedalam suatu grup bebas dengan rank 2.*

Bukti. Untuk membuktikan proposisi ini, cukup menemukan suatu subgrup bebas dari rank terhitung dari suatu grup bebas rank 2. Dimisalkan F_2 merupakan grup bebas dengan basis $\{a, b\}$. Dinotasikan $x_n = b^n ab^{-n}$ dengan $n = 0, 1, 2, \dots$ dan dimisalkan $S = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$.

Klaim: Himpunan S membangun bebas suatu subgrup $\langle S \rangle$ di F_2.

Diambil sebarang $w = x_{i_1}^{e_1} x_{i_2}^{e_2} \dots x_{i_n}^{e_n}$ merupakan kata tak kosong tereduksi di $S \cup S^{-1}$. Akibatnya w dapat dipandang sebagai suatu kata di $\{a, b\}$. Dimisalkan

$$w = b^{i_1} a^{e_1} b^{-i_1} b^{i_2} a^{e_2} b^{-i_2} \dots b^{i_n} a^{e_n} b^{-i_n}.$$

Karena w merupakan kata tereduksi di S, dipunyai $i_j \neq i_{j+1}$ atau $i_j = i_{j+1}$ dan $e_j + e_{j+1} \neq 0$, untuk setiap $j = 1, 2, \dots, n-1$. Dilain pihak, sebarang reduksi dari w (sebagai kata di $\{a, b\}$) tidak mempengaruhi a^{e_j} dan $a^{e_{j+1}}$ pada subkata

$$b^{i_j} a^{e_j} b^{-i_j} b^{i_{j+1}} a^{e_{j+1}} b^{-i_{j+1}}$$

yaitu a^{e_j} dan $a^{e_{j+1}}$ merupakan bentuk tereduksi dari kata w di $\{a, b\} \cup \{a, b\}^{-1}$. Akibatnya bentuk tereduksi dari w adalah bukan kata kosong di F_2. Jadi, S merupakan himpunan pembangun bebas subgrup $\langle S \rangle$ di F_2. Dengan demikian $< S >$ merupakan grup bebas dengan rank terhitung. □

Selanjutnya akan diberikan lema yang menunjukkan bahwa jika suatu grup dibangun oleh dua elemen memiliki aksi pada suatu himpunan dan memenuhi kondisi tertentu, maka grup tersebut merupakan grup bebas. Lema ini dikenal sebagai Ping-pong lema.

Lemma 5.3. *(Ping-pong Lemma) Dimisalkan G merupakan suatu grup yang dibangun oleh himpunan a, b dan aksi terhadap suatu himpunan X. Diasumsikan terdapat dua subset tak kosong $A, B \subseteq X$ dengan $A \cap B = \emptyset, a^n B \subseteq A$ dan $b^n A \subseteq B$, untuk setiap bilangan bulat $n \neq 0$, maka grup G merupakan grup bebas yang dibangun oleh himpunan a, b.*

Bukti. Dimisalkan w merupakan kata tak kosong tereduksi di alfabet $a^{\pm 1}, b^{\pm 1}$. Tanpa mengurangi keumuman, dapat diasumsikan bahwa kata w dimulai dan diakhiri dengan $a^{\pm 1}$, karena jika tidak maka untuk m dengan $w_1 = a^m w a^{-m}$, dan $w = 1$ jika dan hanya jika $w_1 = 1$.

Dimisalkan $w = a^{n_1} b^{m_1} \cdot a^{n_{k-1}} b^{m_{k-1}} a^{n_k}$, dengan $n_i, m_i \neq 0$.

Diperoleh

$$\begin{aligned} w \cdot B &= a^{n_1} b^{m_1} \cdot a^{n_{k-1}} b^{m_{k-1}} a^{n_k} \cdot B \\ &\subseteq a^{n_1} b^{m_1} \cdot a^{n_{k-1}} b^{m_{k-1}} \cdot A \\ &\subseteq a^{n_1} b^{m_1} \cdot a^{n_{k-1}} \cdot B \subseteq \dots \\ &\subseteq a^{n_1} \cdot B \\ &\subseteq A. \end{aligned}$$

Diperoleh $w \neq 1$. Jadi, himpunan $\{a, b\}$ membangun bebas G. □

Akibat 5.4. *Suatu matriks* $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *dan* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ *membangun suatu subgrup bebas dengan rank 2 dari* $SL_2(\mathbb{Z})$.

Bukti. Dimisalkan

$$A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & kn \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{Z}) \right\}$$
$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ kn & 1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{Z}) \right\}$$

merupakan subgrup yang dibangun oleh A dan B. Didefinisikan dua subset X_1 dan X_2 dari $\mathbb{R}^2$ sebagai berikut

$$X_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \left| |x| > |y| \right. \right\}$$
$$X_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \left| |y| > |x| \right. \right\}.$$

Diperhatikan bahwa X_2 tidak termuat di dalam X_1. Dimisalkan $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & n_1 k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A_1$ dan $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in X_2$. Diperoleh

$$\varphi_1 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n_1 k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + k n_1 y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Karena $|y_2| > |x_2|$, diperoleh

$$|x_2 + k n_1 y_2| > |(|k n_1| - 1)\, y_2| = (|k n_1| - 1)\, |y_2| \geq |y_2| .$$

Akibatnya $\varphi_1 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in X_1$. Selanjutnya dimisalkan $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k n_2 & 1 \end{pmatrix} \in B_1$.

Dengan menggunakan Ping-pong Lemma, subgrup dari $SL_2(\mathbb{Z})$ dibangun secara bebas oleh A dan B. □

Jika suatu grup dapat disisipkan kedalam suatu grup matriks atas lapangan $GL_n(P)$, maka grup tersebut merupakan grup linear. Definisi grup linear nantinya akan digunakan sebagai salah satu sifat dari grup bebas yaitu sebarang grup bebas yang dibangun secara hingga merupakan grup linear.

Definisi 5.5. *Suatu grup G disebut grup linear jika G dapat disisipkan kedalam suatu grup matriks $GL_n(P)$, untuk suatu bilangan bulat $n > 1$ dan suatu lapangan P.*

Berikut ini akan diberikan teorema yang menunjukkan bahwa sebarang grup bebas yang dibangun secara hingga merupakan grup linear.

Teorema 5.6. *Suatu grup bebas dari rank terhitung adalah grup linear. Secara umum, grup bebas yang dibangun secara hingga adalah grup linear.*

Bukti. Berdasarkan Proposisi 5.2 dan Akibat 5.4, dipunyai grup $G =< A, B >$ dengan $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ yang merupakan subgrup bebas di $SL_2(\mathbb{Z})$. Karena $SL_2(\mathbb{Z})$ subgrup dari $GL_2(\mathbb{Z})$, akibatnya G dapat disisipkan kedalam grup matriks $GL_2(\mathbb{Z})$. Dengan kata lain, grup G merupakan grup linear dan sebarang grup bebas yang dibangun secara hingga merupakan grup linear. □

Selanjutnya akan dibahas sifat lain dari grup bebas yaitu sebarang grup bebas merupakan grup residually berhingga. Terlebih dahulu akan dipaparkan mengenai definisi dari grup residually berhingga seperti berikut ini.

Definisi 5.7. *Suatu grup disebut residually berhingga jika untuk sebarang elemen tak trivial $g \in G$ terdapat homomorfisma $\phi : G \to H$ dengan H merupakan suatu grup berhingga sedemikian sehingga $\phi(g) \neq 1$.*

6. PRESENTASE GRUP

Diberikan sebarang grup G dengan himpunan S sebagai pembangun dari G. Berdasarkan Teorema 3.1, terdapat suatu homomorfisma $\phi : F(S) \to G$ sedemikian sehingga $\phi(s) = s$, untuk setiap $s \in S$. Diperhatikan bahwa ϕ merupakan pemetaan surjektif, sebab untuk setiap $s_1^{j_1} \ldots s_n^{j_n} \in G$, terdapat $s_1, \ldots, s_n \in S$ sedemikian sehingga $\phi\left(s_1^{j_1} \ldots s_n^{j_n}\right) = s_1^{j_1} \ldots s_n^{j_n}$. Dengan menggunakan Teorema Isomorfisma Pertama diperoleh

$$G \cong F(S)/\ker(\phi)$$

Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \ker(\phi) &= \{w \in F(S) \mid \phi(w) = 1_G\} \\ &= \left\{s_1^{j_1} \ldots s_n^{j_n} \mid \phi\left(s_1^{j_1} \ldots s_n^{j_n}\right) = 1_G\right\} \\ &= \left\{s_1^{j_1} \ldots s_n^{j_n} \mid \phi\left(s_1\right)^{j_1} \ldots \phi\left(s_n\right)^{j_n} = 1_G\right\} \\ &= \left\{s_1^{j_1} \ldots s_n^{j_n} \mid s_1^{j_1} \ldots s_n^{j_n} = 1_G\right\}. \end{aligned}$$

Dalam hal ini, $\ker(\phi)$ dipandang sebagai relator dari G dan suatu $w \in \ker(\phi)$ disebut sebagai relator dari G yang dibangun oleh S. Jika suatu subset $R \subseteq ker(\phi)$ membangun $\ker(\phi)$ sebagai subgrup normal dari $F(S)$, maka subset R merupakan suatu himpunan relasi dari G relatif terhadap S. Akibatnya, pasangan $\langle S \mid R\rangle$ disebut sebagai presentasi dari G. Presentasi $\langle S \mid R\rangle$ disebut presentasi berhingga jika himpunan S dan R merupakan himpunan berhingga. Suatu grup disebut sebagai dipresentasikan secara berhingga jika mempunyai setidaknya satu presentasi berhingga. Jika suatu grup G dapat didefinisikan sebagai suatu presentasi, maka dapat ditemukan suatu homomorfisma dari grup G ke grup lainnya.

Lemma 6.1. *Dimisalkan $G =< S \mid R >$ merupakan suatu grup yang didefinisikan sebagai suatu presentasi (berhingga) dengan himpunan relator $R = \left\{ r_j = y^j_{i_1} \dots y^j_{i_j} \mid y^j_{i_k} \in S \cup S^{-1}, 1 \le j \le m \right\}$, dan H merupakan sebarang grup. Suatu pemetaan $\psi : S \cup S^{-1} \to H$ dapat diperluas kedalam suatu homomorfisma $\bar{\psi} : G \to H$ jika dan hanya jika $\psi(r_j) = \psi\left(y^j_{i_1}\right)..\psi\left(y^j_{i_j}\right) = 1_H$, untuk setiap $r_j \in R$.*

Bukti. $(\Rightarrow)$
Diketahui grup $G =< S \mid R >$ dan pemetaan $\psi : S \cup S^{-1} \to H$, untuk sebarang grup H. Didefinisikan suatu pemetaan $\bar{\psi} : G \to H$ dengan $\bar{\psi}(y_{n_1} \dots y_{n_t}) = \psi(y_{n_1}) \dots \psi(y_{n_t})$, untuk setiap $y_{n_i} \in S \cup S^{-1}$. Akan ditunjukkan bahwa $\bar{\psi}$ merupakan hommorfisma grup. Diambil sebarang $y_{n_1 \dots} y_{n_t}, z_{k_1} \dots z_{k_p} \in G$, untuk setiap $y_(n_i), z_(k_j) \in S \cup S^{-1}$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\left(y_{n_1} \dots y_{n_t} z_{k_1} \dots z_{k_p}\right) &= y_{n_1} \dots y_{n_t} z_{k_1} \dots z_{k_p} \\ &= \bar{\psi}(y_{n_1} \dots y_{n_t})\, \bar{\psi}\left(z_{k_1} \dots z_{k_p}\right). \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa pemetaan $\bar{\psi}$ merupakan homomorfisma grup. Akibatnya untuk setiap $r_j \in R$, diperoleh

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(r_j) &= \bar{\psi}\left(y^j_{i_1} \dots y^j_{i_j}\right) \\ &= \psi\left(y^j_{i_1}\right) \dots \psi\left(y^j_{i_j}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$

Diketahui $\psi(r_j) = \psi\left(y^j_{i_1}\right)..\psi\left(y^j_{i_j}\right) = 1_H$ untuk setiap $r_j \in R$. Dimisalkan η merupakan homomorfisma natural dari $F(S)$ ke G. Dimisalkan $U = \psi\left(S \cup S^{-1}\right)$ dan $F(U)$ merupakan grup bebas yang dibangun oleh U. Akibatnya terdapat homomorfisma natural $\lambda : F(U) \to H_1$, untuk suatu H_1 subgrup di H yang dibangun oleh $U = \psi\left(S \cup S^{-1}\right)$. Dengan menggunakan sifat universal dari grup bebas, suatu pemetaan $\psi : S \cup S^{-1} \to U$ dapat diperluas kedalam suatu homomorfisma $\alpha : F(S) \to F(U)$. Akibatnya dipunyai suatu komposisi dari homomorfisma $\lambda \circ \alpha : F(S) \to H_1$.

$$\begin{array}{ccc} \alpha : F(S) \to & F(U) \\ \eta \downarrow & \downarrow \lambda \\ G & H \end{array}$$

Diambil sebarang $g = y_{n_1} \dots y_{n_t} \in G$ dengan $y_{n_i} \in S \cup S^{-1}$. Tanpa mengurangi keumuman, dapat diasumsikan bahwa suatu kata $w_g = y_{n_1} \dots y_{n_t}$ merupakan kata tereduksi dengan memandang $w_g \in F(S)$. Didefinisikan $\bar{\psi}(g) = \lambda \circ \alpha(w_g)$. Akan ditunjukkan pemetaan $\bar{\psi}$ well-defined. Perlu ditunjukkan bahwa $\lambda \circ \alpha(w_g) = \lambda \circ \alpha(w_b)$, dengan $\eta(w_g) = \eta(w_b)$, untuk setiap $w_g, w_b \in F(S)$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} &\eta(w_g) = \eta(w_b) \\ \Leftrightarrow &\eta\left(w_b^{-1} w_g\right) = 1_{F(S)} \\ \Leftrightarrow &w_b^{-1} w_g \in \ker(\eta) \\ \Leftrightarrow &\exists w_k \in \ker(\eta), w_k = w_b^{-1} w_g \\ \Leftrightarrow &w_g = w_b w_k. \end{aligned}$$

Berdasarkan asumsi pada ψ, diperoleh $\lambda \circ \alpha(w_k) = 1_H$. Akibatnya $\lambda \circ \alpha(w_g) = \lambda \circ \alpha(w_b)$ dan pemetaan $\bar{\psi}(g)$ well-defined. Selanjutnya, akan ditujukkan pemetaan $\bar{\psi}$ merupakan homomrfisma grup. Diambil sebarang $w_a, w_b \in F(S)$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(w_a w_b) &= \lambda \circ \alpha(w_a w_b) \\ &= \lambda(\alpha(w_a w_b)) \\ &= \lambda(\alpha(w_a)\alpha(w_b)) \\ &= \lambda(\alpha(w_a))\lambda(\alpha(w_b)) \\ &= \lambda \circ \alpha(w_a)\lambda \circ \alpha(w_b) \\ &= \bar{\psi}(w_a)\bar{\psi}(w_b). \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa pemetaan $\bar{\psi}$ merupakan homomorfisma grup. $\square$

Pembahasan komutan diperlukan untuk mendefinisikan suatu abelianisasi dari suatu grup. Oleh sebab itu, perlu ditunjukkan bahwa jika G adalah grup, maka komutan dari grup G merupakan subgrup normal dari G.

Proposisi 6.2. *Diberikan G merupakan grup. Suatu komutan G' adalah subgrup normal yang dibangun oleh semua komutator dari G.*

Bukti. Dimisalkan G adalah grup. Jika $a, b \in G$, maka komutator dari a dan b adalah $aba^{-1}b^{-1}$. Didefinisikan

$$G' = \{x_1 x_2 \dots x_n \mid x_i \text{ komutator di } G, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Dengan kata lain, himpunan G' merupakan koleksi semua produk berhingga dari komutaorkomutator di G. Akan ditunjukkan C subgrup normal dari G.
Diperhatikan bahwa G' bukan merupakan himpunan kosong sebab terdapat $e = eee^{-1}e^{-1} \in$

G'. Akibatnya, himpunan G' memuat elemen identitas. Diambil sebarang $c = x_1x_2 \dots x_n$ dan $d = y_1y_2 \dots y_m$ di G', untuk setiap x_i dan y_i merupakan komutator di G. Diperoleh

$$cd = x_1x_2 \dots x_n y_1 y_2 \dots y_m \in G'$$

Diperhatikan bahwa

$$c^{-1} = (x_1x_2 \dots x_n)^{-1} = x_n^{-1} \dots x_2^{-1} x_1^{-1},$$

sebab jika $x_i = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$, maka $x_i^{-1} = b_i a_i b_i^{-1} a_i^{-1}$ juga merupakan komutator di G. Akibatnya $c^{-1} \in G'$. Jadi, himpunan G' merupakan subgrup di G.

Diambil sebarang $g \in G$ dan $c = x_1x_2 \dots x_n \in G'$. Diperoleh

$$\begin{aligned} gcg^{-1} &= g\left(x_1x_2 \dots x_n\right)g^{-1} \\ &= gx_1\left(g^{-1}g\right)x_2\left(g^{-1}g\right)\dots\left(g^{-1}g\right)x_ng^{-1} \\ &= \left(gx_1g^{-1}\right)\left(gx_2g^{-1}\right)\dots\left(gx_ng^{-1}\right) \end{aligned}$$

Dimisalkan $x_i = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$, untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$. Diperoleh

$$\begin{aligned} gx_ig^{-1} &= ga_ib_ia_i^{-1}b_i^{-1}g^{-1} \\ &= ga_i\left(g^{-1}g\right)b_i\left(g^{-1}g\right)a_i^{-1}\left(g^{-1}g\right)b_i^{-1}g^{-1} \\ &= \left(ga_ig^{-1}\right)\left(gb_ig^{-1}\right)\left(ga_i^{-1}g^{-1}\right)\left(gb_i^{-1}g^{-1}\right). \end{aligned}$$

Diperhatikan bahwa untuk setiap i, berlaku

$$\left(ga_ig^{-1}\right)^{-1} = \left(g^{-1}\right)^{-1}a_i^{-1}g^{-1} = ga_i^{-1}g^{-1}.$$

Akibatnya

$$gx_ig^{-1} = \left(ga_ig^{-1}\right)\left(gb_ig^{-1}\right)\left(ga_ig^{-1}\right)^{-1}\left(gb_ig^{-1}\right)^{-1}.$$

merupakan suatu komutator di G. Dengan demikian, $gcg^{-1} \in G'$. Jadi, himpunan G' subgrup normal dari G. □

Berdasarkan Proposisi 6.2, dapat dibentuk suatu grup faktor G/G'. Proposisi berikut ini menunjukkan bahwa grup faktor G/G' merupakan grup komutatif.

Proposisi 6.3. *Jika G grup dan G' komutan dari G, maka grup G/G' merupakan grup komutatif. Selanjutnya, grup G/G' disebut sebagai abelianisasi dari G.*

Bukti. Diambil sebarang $a, b \in G$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} aba^{-1}b^{-1} \in G' &\Leftrightarrow (ab)(ba)^{-1} \in G' \\ &\Leftrightarrow abG' = baG' \\ &\Leftrightarrow aG'bG' = bG'aG' \end{aligned}$$

□

Teorema berikut menunjukkan bahwa suatu abelianisasi dari sebarang grup bebas merupakan grup bebas komutatif.

Teorema 6.4. *Jika $F(X)$ merupakan grup bebas yang dibangun oleh X, maka abelianisasi $F(X)/F(X)'$ merupakan grup bebas komutatif.*

Bukti. Diberikan $F(X)$ merupakan grup bebas yang dibangun oleh X. Dimisalkan H merupakan sebarang grup komutatif dan f sebarang pemetaan dari X ke H. Berdasarkan Teorema 3.1, terdapat dengan tunggal homomorfisma $g : F(X) \to H$ sedemikian sehingga $g \circ i = f$, dengan $i : X \to F(X)$. Dibentuk homomorfisma natural $\pi : F(X) \to F(X)/F(X)'$. Berdasarkan Teorema 3.1, terdapat dengan tunggal homomorfisma $h : F(X)/F(X)' \to H$ sedemikian sehingga $h \circ \pi = g$. Akibatnya, $h \circ (\pi \circ i) = f$. Berdasarkan Akibat 3.2, diperoleh bahwa $F(X)/F(X)'$ merupakan grup bebas komutatif yang dibangun oleh X. $\square$

Secara umum, jika diberikan

$$G =< s_1, \ldots, s_n \mid r_1, \ldots, r_m >$$

maka

$$G/G' =< s_1, \ldots, s_n \mid r_1, \ldots, r_m, [s_i, s_j]\,(1 \le i < j \le n) >$$

Teorema berikut ini akan menunjukkan bahwa jika diberikan suatu grup dengan presentasi berhingga, maka presentasi abelianisasi dari grup tersebut juga berhingga.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa jika diberikan suatu grup G, maka terdapat homomorfisma dari abelianisasi G ke sebarang grup faktor dari G.

Akibat 6.5. *Dimisalkan G grup dan H merupakan grup faktor komutatif dari G. Jika pemetaan $v : G \to G/G'$ dan $\psi : G \to H$ merupakan homomorfisma natural, maka terdapat suatu homomorfisma $\varphi : G/G' \to H$ sedemikian sehingga*

$$\begin{array}{c} G \to G/G' \\ \psi \searrow \ \downarrow \varphi \\ \quad H \end{array}$$

Bukti. Diberikan himpunan $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ dan $R = \{r_1, \ldots, r_m\}$. Dimisalkan $G =< S \mid R >$ grup dan pemetaan $v : G \to G/G'$ homomorfisma natural. Akan ditunjukkan $G/G' =< v(S) >$. Diperhatikan bahwa $< v(S) >\subseteq G/G'$. Diambil sebarang $p \in G/G'$ dengan $p = v(a)$, untuk suatu $a \in G$. Karena $G =< S >$, maka terdapat $y_1, \ldots, y_n \in S$ sedemikian sehingga $a = y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n}$. Diperoleh

$$\begin{aligned} p &= v(a) \\ &= v\left(y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n}\right) \\ &= v\left(y_1\right)^{k_1} \ldots v\left(y_n\right)^{k_n} \\ &\in< v(S) > \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $G/G' =< v(S) >$.
Selanjutnya untuk setiap $s_i \in S, v\left(s_i\right)$ cukup dinotasikan dengan s_i.
Dimisalkan presentasi dari G/G' adalah $< s_1, \ldots, s_n \mid r_1, \ldots, r_m, [s_i, s_j]\,(1 \le i < j \le n) >$.
Didefinisikan pemetaan $\varphi' : v(S) \to H$ dengan $\varphi'\left(s_i\right) = \psi\left(s_i\right)$, untuk setiap $s_i \in S$. Diambil sebarang $r_j \in R$. Karena $r_j = 1_G$ dan ψ merupakan homomorfisma grup, maka diperoleh $\varphi'\left(r_j\right) = \psi\left(r_j\right) = 1_H$. Lebih lanjut, untuk setiap $1 \le 1 < j \le n$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\varphi'([s_i, s_j]) &= \psi([s_i, s_j]) \\
&= \psi\left(s_i s_j s_i^{-1} s_j^{-1}\right) \\
&= \psi(s_i)\,\psi(s_j)\,\psi\left(s_i^{-1}\right)\psi\left(s_j^{-1}\right) \\
&= 1_H.
\end{aligned}$$

Berdasarkan Lemma 6.1, pemetaan φ' dapat diperluas kedalam suatu homomorfisma $\varphi : G/G' \to H$. □

7. PENUTUP

7.1. **Kesimpulan.** . Berdasarkan pembahasan dalam bab-bab sebelumnya dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut

(1) Definisi grup bebas tidak terlepas dari pembahasan mengenai himpunan pembangun bebas. Jika G grup dan memuat himpunan pembangun bebas X, maka G disebut grup bebas. Dengan kata lain, untuk setiap kata tak kosong tereduksi pada X mendefinisikan suatu elemen tak trivial pada G. Lebih lanjut, himpunan pembangun bebas X disebut sebagai basis dari G dan kardinalitas dari basis X disebut sebagai rank dari G.

(2) Diberikan G grup yang dibangun oleh $S \subseteq G$. Grup G merupakan grup bebas yang dibangun oleh S jika dan hanya jika G memenuhi sifat pemetaan universal grup bebas. Setiap pemetaan $\phi : S \to H$ dengan H adalah sebarang grup, maka dapat diperluas menjadi suatu homomorfisma tunggal $\bar{\phi} : G \to H$ seperti pada diagram berikut.

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\phi"'] & G \arrow[d, "\tilde{\phi}"] \\
& H
\end{tikzcd}$$

(3) Basis pada grup bebas komutatif merupakan sebarang grup komutatif yang memuat himpunan basis.

(4) Sifat-sifat grup bebas yang dibahas pada penelitin ini adalah sebagai berikut:
   (a) Setiap grup isomorfis dengan grup faktor dari suatu grup bebas.
   (b) Jika $X = \{x\}$, maka $F(X) \cong \mathbb{Z}$.
   (c) Jika G grup bebas komutatif dengan basis $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, maka n ditentukan oleh G secara tunggal. Selanjutnya G disebut grup bebas komutatif dengan rank n.
   (d) Sebarang dua basis dari suatu grup bebas komutatif mempunyai kardinalitas yang sama.
   (e) Dimisalkan F dan G merupakan grup bebas yang masing-masing dibangun oleh X dan Y . Akibatnya $F \cong G$ jika dan hanya jika $|X| = |Y|$.

(5) Dimisalkan $F(Y)$ grup bebas yang dibangun oleh Y dan suatu $S \subseteq Y$, maka subgrup $< S >$ dibangun oleh S di $F(Y)$, merupakan grup bebas dengan basis S. Hal ini menunjukkan jika m dan n bilangan kardinal dan $n \leq m$, maka F_m dapat disisipkan ke F_n. Akibatnya grup bebas dengan rank yang lebih besar dapat disisipkan kedalam grup bebas dengan rank yang lebih kecil.

(6) Presentasi $< S|R >$ disebut presentasi berhingga jika himpunan S dan R merupakan himpunan berhingga. Suatu grup disebut sebagai dipresentasikan secara berhingga jika mempunyai setidaknya satu presentasi berhingga.

7.2. **Saran.** Berdasarkan penelitian yang telah penulis lakukan maka dapat disampaikan beberapa saran sebagai berikut:

(1) Penelitian ini hanya membahas gambaran kecil mengenai grup bebas. Bagi peneliti selanjutnya, diharapkan dapat memperluas pembahasan terkait grup bebas yang lebih detail.

(2) Pembahasan grup bebas dan konsep presentasi grup oleh generator dan relasi termuat dalam konsep teori grup kombinatorial. Ini banyak digunakan dalam topologi geometris dan grup fundamental dari kompleks sederhana yang memiliki presentasi secara alami dan geometris. Diharapkan ada penelitian selanjutnya mengenai konsep teori grup kombinatorial secara detail.

Demikian saran-saran dari penulis. Semoga penelitian ini dapat menjadi inspirasi bagipenelitian-penelitian selanjutnya terutama dalam ilmu matematika khususnya dalambidang aljabar.

Referensi

[1] Adhikari, M. R. 2016. *Basic Algebraic Topology and Its Applications.* Springer. India.
[2] Dummit, D. S. dan Foote, R. M. 2004. *Abstract Algebra.* Third Edition. John Wiley and Sons, Inc. USA.
[3] Goncalves, J. Z., Passman, D. S. 2015. Free Groups in Normal Subgroups of The Multiplicative Group of a Division Ring. *Journal of Algebra.* Vol. 440.
[4] Hungerford, T. W. 1974. *Algebra.* Springer-Verlag New York, Inc. USA.
[5] Malik, D. S. 1997, *Fundamentals of Abstract Algebra.* McGraw-Hill Companies, Inc., Singapore.
[6] Malik, D. S., Modershon, J.N., dan Sen, M.K. 2007. *An Introduction to Abstract Algebra.* Creighton University. USA.
[7] Pinter, C. *A Book of Set Theory.* Courier Corporation. US.
[8] Rotman, J. J. 1995. *An Introduction to the Theory of Groups.* Fourth Edition. Springer-Verlag New York, Inc. USA.

FITRI ALFIANTI* (Penulis Korespondensi)
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia.
fitrialfianti@mail.ugm.ac.id

INDAH EMILIA WIJAYANTI
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia.
ind_wijayanti@ugm.ac.id