Jurnal Matematika Thales (JMT): 2023 ISSN: 2715-1891
Vol. 05 No. 01

IDEAL PRIMA DAN IDEAL MAKSIMAL DARI HEMIRING KASAR

(PRIME IDEAL AND MAXIMAL IDEAL OF ROUGH HEMIRINGS)

Fakhry Asad Agusfrianto*, Desfan Hafifulloh, Bhayu Phermana Sachty Muktar

Abstract. Rough set is a concept of set that has application in the field of computer and informatics. Rough set is a generalization of set theory both from set operations and properties on sets. In 1982, Pawlak introduced the concept of rough set and its properties of a set. Furthermore, the concept of rought set has a relationship with concepts in algebraic structure. Concepts in algebraic structures include group theory, groupoids, monoids, rings, semirings, hemirings, and modules as well as other basic concepts that exist in the realm of algebra. Based on this, the concept of rough sets can be associated with existing concepts in algebraic structures so as to obtain a new concept called rough algebraic structures. The discussion in this paper will focus on hemiring which includes prime ideal and maximal ideal. Then, the concept of rough hemiring is given includingc the ideal concept of rough hemiring. Furthermore, it will be shown that a maximal ideal in rough hemiring is a prime ideal in rough hemiring and investigate some properties of prime ideals and maximal ideals in rough hemiring and hemiring. Furthermore, definition related to rough Noether hemiring will be given as a generalization of Noether hemiring and it will be shown that the properties of Noether hemiring still hold in rough Noether hemiring.

Keywords: Rough Hemiring, Prime Ideal Rough Hemiring, Maximal Ideal Rough Hemiring

---

2010 Mathematics Subject Classification: 46J20,

Abstrak. Himpunan kasar merupakan konsep himpunan yang mempunyai penerapan pada bidang komputer dan informatika. Himpunan kasar merupakan perluasan dari teori himpunan baik dari operasi himpunan maupun sifat-sifat pada himpunan. Pada tahun 1982, Pawlak memperkenalkan konsep himpunan kasar dan sifat-sifatnya dari suatu himpunan. Selanjutnya, konsep himpunan kasar memiliki keterkaitan dengan konsep di struktur aljabar. Konsep pada struktur aljabar meliputi teori grup, grupoid, monoid, ring, semiring, hemiring, dan modul serta konsep dasar lainya yang ada pada ranah aljabar. Berdasarkan hal tersebut, dapat dikaitkan konsep himpunan kasar dengan konsep yang ada pada struktur aljabar sehingga diperoleh konsep baru yang dinamakan struktur aljabar kasar. Pembahasan pada paper ini akan berfokus pada hemiring yang meliputi ideal prima dan ideal maksimal. Kemudian, diberikan konsep kasar pada hemiring termasuk konsep ideal dari hemiring kasar. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa ideal maksimal di hemiring kasar merupakan ideal prima di hemiring kasar dan menyelidiki beberapa sifat dari ideal prima dan ideal maksimal di hemiring dan hemiring kasar. Selanjutnya, juga akan diberikan definisi terkait hemiring Noether kasar sebagai perumuman dari hemiring Noether dan akan ditunjukkan juga bahwa sifat dari hemiring Noether ternyata masih berlaku pada hemiring Noether kasar.

Kata-kata kunci: Hemiring Kasar, Ideal Prima Hemiring Kasar, Ideal Maksimal Hemiring Kasar.

1 PENDAHULUAN

Himpunan kasar pertama kali dikenalkan oleh Pawlak pada tahun 1982 (Pawlak [5]). Selanjutnya, konsep himpunan kasar erat kaitannya dengan ruang aproksimasi (Pawlak [5]). Dalam ruang aproksimasi, ada konsep aproksimasi atas dan aproksimasi bawah yang mana ini digunakan untuk membentuk definisi himpunan kasar (Pawlak [5]) atau (Davvaz [2]). Selanjutnya, dalam struktur aljabar kita mengenal konsep grup, grupoid, semigrup, ring, semiring, hemiring, dan modul. Pada penelitian kali ini, fokus pembahasan kita adalah pada hemiring. Selanjutnya, telah dikonstruksi konsep kasar dari hemiring termasuk ideal dari hemiring (Ali et. al. [1]). Paper ini bertujuan untuk mendefinisikan konsep ideal prima dan ideal maksimal dari hemiring kasar. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa ideal maksimal dari hemiring kasar juga merupakan ideal prima dari hemiring kasar dan juga akan ditunjukkan bahwa beberapa sifat ideal prima dan ideal maksimal dari hemiring dapat dibawa ke hemiring kasar. Selanjutnya, akan diberikan definisi dari hemiring Noether kasar sebagai perumuman dari hemiring Noether dan akan ditunjukkan bahwa sifat pada hemiring Noether masih dapat dibawa ke hemiring Noether Kasar.

2 LANDASAN TEORI

2.1 Hemiring

Pada bagian ini akan dipaparkan konsep hemiring serta ideal dari hemiring. Sebelum diberikan definisi dari hemiring, akan diberikan definisi dari semigrup dan monoid terlebih dahulu karena monoid memiliki keterkaitan dengan hemiring.

Definisi 2.1. *(Golan [3]) Misalkan M himpunan tak kosong dan $\star$ adalah operasi biner di M. M disebut* ***semigrup*** *jika operasi asosiatif $\star$ terdefinisi di M dan jika M memiliki elemen identitas, maka M disebut monoid.*

Berdasarkan definisi diatas maka dapat didefinisikan hemiring.

Contoh 2.2. *Misalkan diberikan $M_2(Z) = \{\begin{bmatrix} a & b & b & a \end{bmatrix} | a, b \in Z\}$ adalah himpunan matriks berordo 2 dengan elemen bilangan bulat. Diberikan operasi biner $\star = \odot$ yang merupakan operasi perkalian standar pada matriks. Diambil $A, B, C \in M_2(Z)$. Maka, jelas berlaku $A \odot (B \odot C) = (A \odot B) \odot C$ sehingga $(M_2(Z), \odot)$ merupakan* ***semigrup****. Selanjutnya, terdapat elemen identitas $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ sehingga $AI = IA = I$. Maka, $(M_2(Z), \odot)$ juga merupakan* ***monoid****.*

Definisi 2.3. *(Golan [3]) Himpunan tak kosong M dengan operasi penjumlahan dan perkalian terdefinisi disebut* ***hemiring*** *jika kondisi berikut terpenuhi*

(1) *$(R, +)$ adalah monoid yang komutatif dengan elemen identitas 0.*
(2) *$(R, \cdot)$ adalah semigrup.*
(3) *Berlaku sifat distribusi kiri dan kanan di R.*
(4) *$0r = 0 = r0$ untuk setiap $r \in R$.*

Definisi 2.4. *(Ali et. al. [1]) Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah* ***semiring****. Jika R dilengkapi dengan penjumlahan dengan 0 dan penjumlahannya bersifat komutatif, maka disebut hemiring.*

Contoh 2.5. *Misalkan diberikan himpunan $Z[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Z\}$. Karena 0 merupakan elemen identitas di $Z[\sqrt{2}]$ dan operasi penjumlahan di $Z[\sqrt{2}]$ bersifat komutatif, maka kondisi (1) terpenuhi. Selanjutnya, ambil $K, L, M \in Z[2]$ dan tulis $K = k_1 + k_2\sqrt{2}$, $L = l_1 + l_2\sqrt{2}$, dan $M = m_1 + m_2\sqrt{2}$. Maka, dapat ditunjukkan bahwa $(K \cdot L) \cdot M = K \cdot (L \cdot M)$. Maka, kondisi (2) terpenuhi. Selanjutnya,*

$$
\begin{aligned}
(K + L)M &= \Big((k_1 + l_1) + (k_2 + l_2)\sqrt{2}\Big)\Big(m_1 + m_2\sqrt{2}\Big) \\
&= (k_1 + l_1) m_1 + ((k_1 + l_1) m_2 + (k_2 + l_2) m_1)\sqrt{2} + (k_2 + l_2)(2m_2) \\
&= m_1 (k_1 + l_1) + (m_2 (k_1 + l_1) + m_1 (k_2 + l_2))\sqrt{2} + (2m_2)(k_2 + l_2) \\
&= \Big(m_1 + m_2\sqrt{2}\Big)\Big((k_1 + l_1) + (k_2 + l_2)\sqrt{2}\Big) \\
&= M(K + L)
\end{aligned}
$$

Maka, sifat distributif kiri dan kanan berlaku di R. Selanjutnya, karena 0 adalah elemen identitas di $Z[\sqrt{2}]$, maka untuk setiap $r \in Z[\sqrt{2}]$, berlaku $0r = r0 = 0$. Akibatnya, himpunan $Z[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in Z\}$ merupakan hemiring.

Maka, sifat distributif kiri dan kanan berlaku di R.

Selanjutnya, karena 0 adalah elemen identitas di $Z[\sqrt{2}]$, maka untuk setiap $r \in Z[\sqrt{2}]$, berlaku $0r = r0 = 0$. Akibatnya, himpunan $Z[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Z\}$ merupakan hemiring.

Contoh 2.6. $(N \cup \{0\}, +, \star)$ *dengan "* $+$ *" adalah operasi penjumlahan dan "*$\star$*" adalah operasi perkalian adalah hemiring.*

Selanjutnya, akan diberikan definisi dari ideal pada hemiring.

Definisi 2.7. *(Golan* [3]*) Misalkan R hemiring dan I adalah subhimpunan tak kosong dari R. Maka, I dikatakan* ***ideal*** *dari hemiring R jika kondisi berikut dipenuhi :*

(1) *Jika $a, b \in I$, maka $a + b \in I$*
(2) *Jika $a \in I$ dan $r \in R$, maka ra, $ar \in I$*
(3) $I \neq R$

Definisi 2.8. *(Golan* [3]*) Hemiring R disebut* ***noetherian kiri*** *jika dan hanya jika memenuhi kondisi rantai naik pada ideal kiri.*

Berdasarkan definisi diatas maka kita memiliki proposisi sebagai berikut.

Proposisi 2.9. *(Golan* [3]*) Jika R adalah hemiring, maka kondisi berikut pada hemiring R akan ekuivalen :*

(1) *R adalah noetherian kiri;*
(2) *Suatu koleksi ideal dari R memiliki elemen maksimal;*
(3) *Tiap ideal dari R dibangun hingga.*

Selanjutnya, akan diberikan definisi dari ideal prima dan ideal maksimal dari hemiring serta beberapa sifat yang terkait dengan ideal prima dan ideal maksimal dari hemiring.

Definisi 2.10. *(Golan* [3]*) Misalkan P adalah ideal dari hemiring R. Ideal P dikatakan* ***ideal prima*** *jika untuk setiap dua ideal H, K di R dengan $HK \subseteq P$ maka berakibat $A \subseteq P$ atau $B \subseteq P$. Himpunan dari ideal prima pada hemiring R disebut* ***spektrum*** *dari R dan dinotasikan dengan* $\mathrm{spec}(R)$.

Proposisi 2.11. *(Golan* [3]*) Jika I adalah ideal dari hemiring R. Maka, kondisi berikut ekuivalen :*

(1) *I merupakan ideal prima;*
(2) *$\{r \in R\} \subseteq I$ jika dan hanya jika $a \in I$ atau $b \in I$;*
(3) *Jika $a, b \in R$ dan memenuhi $(a)(b) \subseteq I$, maka $a \in I$ atau $b \in I$.*

Akibat 2.12. *(Golan* [3]*) Jika a dan b merupakan elemen dari hemiring R, maka kondisi berikut jika I merupakan ideal prima di R adalah ekuivalen:*

(1) *Jika $a, b \in I$, maka $a \in I$ atau $b \in I$;*
(2) *Jika $ab \in I$, maka $ba \in I$.*

Selanjutnya, akan diberikan definisi dari ideal maksimal.

Definisi 2.13. *Diberikan hemiring R dan ideal M di R. Ideal M disebut* ***ideal maksimal*** *jika $M \neq R$ dan tidak ada ideal I di R sedemikian rupa sehingga $M \subset I \subset R$.*

Akibat 2.14. *(Golan [3]) Suatu ideal maksimal dari hemiring R merupakan ideal prima.*

2.2 Himpunan Kasar

Konsep himpunan kasar secara mendetail awalnya dikenalkan oleh Pawlak pada tahun 1982 (Pawlak [5]). Himpunan kasar merupakan perluasan dari teori himpunan umum. Sebelum diberikan definisi dari himpunan kasar, kita memerlukan definisi dari ruang aproksimasi.

Definisi 2.15. *(Zhang et. al. [7]) Misalkan U adalah himpunan semesta dan θ adalah relasi ekuivalensi dari U. Pasangan (U, θ) dengan $U \neq \varnothing$ disebut ruang aproksimasi.*

Definisi 2.16. *(Zhang et. al. [7]) Diberikan (U, θ) ruang aproksimasi dan dengan operator aproksimasi kasar di (U, θ), definisikan pemetaan $\mathrm{Apr} : P(U) \rightarrow P(U) \times P(U)$ dengan $P(U)$ adalah himpunan kuasa dari U yang didefinisikan untuk setiap $X \in P(U)$, $\mathrm{Apr}(X) = (\underline{\mathrm{Apr}}(X), \underline{\mathrm{Apr}}(X))$, di mana $\underline{\mathrm{Apr}}(X) = \{x \in X \mid [x]_\theta \subseteq X\}$ dan $\underline{\mathrm{Apr}}(X) = \{x \in X \mid [x]_\theta \cap X \neq \emptyset\}$. $\underline{\mathrm{Apr}}(X)$ disebut aproksimasi kasar bawah dan $\underline{\mathrm{Apr}}(X)$ disebut aproksimasi kasar atas dari X di (U, θ).*

Dengan menggunakan Definisi 2.15 dan Definisi 2.16 maka kita dapat tuliskan definisi dari himpunan kasar sebagai berikut.

Definisi 2.17. *(Zhang et. al. [7]) Diberikan ruang aproksimasi (U, θ), pasangan $(A, B) \in P(U) \times P(U)$ disebut himpunan kasar di (U, θ) jika dan hanya jika $(A, B) = \mathrm{Apr}(X)$ untuk suatu $X \in P(U)$.*

Selanjutnya, akan diberikan definisi dari grup kasar.

Definisi 2.18. *(Miao et. al. [4]) Misalkan $S = (U, \theta)$ adalah ruang aproksimasi dan $*$ adalah operasi biner yang terdefinisi di U. Subhimpunan G dari semesta U disebut grup kasar jika sifat berikut dipenuhi:*

(1) *Untuk setiap $x, y \in G$, $x * y \in \underline{G}$;*
(2) *Untuk setiap $x, y, z \in G$ maka $(x * y) * z = x * (y * z)$ atau sifat asosiatif berlaku di $\underline{G}$;*
(3) *Terdapat $e \in \underline{G}$ sedemikian rupa sehingga untuk setiap $x \in G$, $x * e = e * x = x$; e disebut elemen identitas kasar dari grup kasar G;*
(4) *Untuk setiap $x \in G$, terdapat $y \in G$ sedemikian rupa sehingga $x * y = y * x = e$; y disebut elemen invers kasar dari x di G.*

Definisi 2.19. *(Zhang et. al. [7]) Misalkan $S = (U, \theta)$ adalah ruang aproksimasi dengan $\emptyset \neq G \subseteq U$. Jika $\mathrm{Apr}(G) = (\underline{G}, \underline{G})$ memenuhi kondisi:*

(1) *$xy \in \underline{G}$, untuk setiap $x, y \in G$;*
(2) *$(xy)z = x(yz)$, untuk setiap $x, y, z \in G$,*

kita sebut $\mathrm{Apr}(G)$ sebagai semigrup kasar.

Untuk menuju definisi hemiring kasar, kita memerlukan definisi dari himpunan kasar yang diperumum.

Definisi 2.20. *(Yamak et. al.* [6]*) Misalkan U dan W adalah dua himpunan semesta yang tak kosong. Misalkan T adalah pemetaan yang didefinisikan sebagai $T : U \to P(W)$. Maka, tripel pasangan (U, W, T) adalah ruang aproksimasi diperumum atau himpunan kasar yang diperumum. Setiap fungsi bernilai himpunan dari U ke $P(W)$ didefinisikan dengan relasi biner dari U ke W dengan menetapkan $\rho_T = \{(x, y) \mid y \in T(x)\}$. Jika ρ adalah relasi sebarang dari U ke W, maka dapat didefinisikan pemetaan bernilai himpunan $T_\rho : U \to P(W)$ dengan $T_\rho(x) = \{y \in W \mid (x, y) \in \rho\}$ dimana $x \in U$. Untuk suatu himpunan $A \subseteq W$, pasangan aproksimasi bawah dan atas, $\underline{T}(A)$ dan $\underline{T}(A)$ didefinisikan sebagai*

$$\underline{T}(A) = \{x \in U \mid T(x) \subseteq A\} \text{ dan } \underline{T}(A) = \{x \in U \mid T(x) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Pasangan $T(A) = (\underline{T}(A), \underline{T}(A))$ disebut dengan himpunan kasar yang diperumum dengan $\underline{T}(A)$ dan $\underline{T}(A)$ berturut turut adalah aproksimasi bawah dan atas yang diperumum.

Definisi 2.21. *(Ali et. al.* [1]*) Misalkan R adalah hemiring dan ρ adalah relasi kongruensi di R. Untuk setiap subhimpunan tak kosong A di R, kita definisikan*

$$\underline{\rho}(A) = \{x \in R \mid [x]_\rho \subseteq A\}$$
$$\underline{\rho}(A) = \{x \in R \mid [x]_\rho \cap A \neq \emptyset\}$$

$\underline{\rho}(A)$ dan $\underline{\rho}(A)$ secara berturut-turut disebut sebagai aproksimasi ρ-bawah dan ρ-atas dari A.

Teorema 2.22. *(Ali et. al.* [1]*) Misalkan ρ adalah relasi kongruensi pada hemiring R dan A, B subhimpunan tak kosong dari R. Maka, $\underline{\rho}(A) \cdot \underline{\rho}(B) \subseteq \underline{\rho}(A \cdot B)$ dan $\underline{\rho}(A) + \underline{\rho}(B) \subseteq \underline{\rho}(A + B)$.*

Definisi 2.23. *(Ali et. al.* [1]*) Relasi kongruensi ρ pada hemiring R disebut relasi kongruensi penuh di R, jika*

$$[a]_\rho + [x]_\rho = \{s + t \mid s \in [a]_\rho \text{ dan } t \in [x]_\rho\} = [a + x]_\rho$$
$$[a]_\rho [x]_\rho = \{st \mid s \in [a]_\rho \text{ dan } t \in [x]_\rho\} = [ax]_\rho$$

Teorema 2.24. *(Ali et. al.* [1]*) Misalkan ρ adalah relasi kongruensi penuh pada hemiring R. Jika A dan B subhimpunan tak kosong dari R, maka $\underline{\rho}(A) \cdot \underline{\rho}(B) \subseteq \underline{\rho}(A \cdot B)$ dan $\underline{\rho}(A) + \underline{\rho}(B) \subseteq \underline{\rho}(A + B)$.*

Selanjutnya, akan diberikan definisi dari subhemiring kasar dan ideal kasar dari hemiring R.

Definisi 2.25. *(Ali et. al.* [1]*) Subhimpunan tak kosong A dari suatu hemiring R disebut subhemiring bawah(atas) kasar dari R jika $\underline{\rho}(A)(\underline{\rho}(A))$ adalah subhemiring dari R.*

Definisi 2.26. *(Ali et. al.* [1]*) Subhimpunan tak kosong A dari suatu hemiring R dikatakan ideal bawah(atas) kasar kiri(kanan) dari R jika $\underline{\rho}(A)(\underline{\rho}(A))$ adalah ideal kiri(kanan) dari R.*

3 METODE PENELITIAN

Penelitian yang digunakan pada paper ini adalah studi literatur (*literature study*) yaitu membaca referensi terkait penelitian. Langkah awal penelitian ini yaitu mendefinisikan ideal prima dan ideal maksimal dari hemiring. Kemudian, mendefinisikan hemiring kasar (Ali et. al. [1]) beserta contohnya. Setelah itu, mendefinisikan ideal prima dan ideal maksimal pada hemiring kasar (Golan [3]). Langkah akhir, menyelidiki sifat-sifat hemiring kasar yang dibangun oleh ideal prima kasar dan ideal maksimal kasar. Selanjutnya, juga akan diberikan definisi dari hemiring Noether kasar sebagai perumuman dari hemiring Noether.

4 PEMBAHASAN

Berdasarkan definisi ideal pada hemiring kasar maka dapat didefinisikan ideal prima dan ideal maksimal dari hemiring kasar sebagai berikut.

Definisi 4.1. *Misalkan* A, B, C *adalah subhimpunan tak kosong dari hemiring* R*.* $\rho(A)$ *dikatakan ideal prima kasar dari* R *jika* $\rho(B) \cdot \rho(C) \subseteq \rho(A)$ *maka mengakibatkan* $\rho(B) \subseteq \rho(A)$ *atau* $\rho(C) \subseteq \rho(A)$*.*

Definisi 4.2. *Misalkan* M, A *adalah subhimpunan tak kosong dari hemiring* R*.* $\rho(M)$ *disebut ideal maksimal kasar dari* R *jika* $\rho(M) \neq R$ *dan tidak ada ideal kasar* $\rho(A)$ *di* R *sedemikian rupa sehingga* $\rho(M) \subset \rho(A) \subset R$*.*

Contoh 4.3. *Misalkan* $R = Z_7$ *dan didefinisikan operasi perkalian di* R *sebagai berikut.*

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

Tabel 1. Tabel perkalian pada $R = Z_7$

Misalkan ρ *adalah kelas kongruensi di* R *sedemikian rupa sehingga kelas kongruensi-*ρ *adalah* $\{0,1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5,6\}$*. Misalkan* $A = B = C = \{0,1,2\}$*, maka diperoleh* $\underline{\rho}(A) = \underline{\rho}(B) = \underline{\rho}(C) = \{0,1\}$ *dan* $\underline{\rho}(A) = \underline{\rho}(B) = \underline{\rho}(C) = \{0,1\}$ *sehingga diperoleh* $\rho(A) = \rho(B) = \rho(C) = (\{0,1\}, \{0,1\})$*. Selanjutnya, misalkan kita ingin menunjukkan bahwa* $\rho(A)$ *adalah ideal prima kasar dari* R*. Dapat ditunjukkan bahwa* $\rho(A), \rho(B)$ *dan* $\rho(C)$ *adalah ideal kasar dari* R*. Maka, diperoleh* $\rho(B) \cdot \rho(C) = \{0,1\} \subseteq \rho(A)$ *yang mengakibatkan* $\rho(B) \subseteq \rho(A)$*. Sehingga* $\rho(A)$ *merupakan ideal prima kasar dari* R*.*

Selanjutnya, akan diberikan contoh ideal maksimal kasar dari hemiring R.

Contoh 4.4. *Misalkan* $R = Z_3$*. Misalkan* λ *adalah kelas kongruensi di* R *sedemikian rupa sehingga kelas kongruensi-*λ *adalah* $\{0,1\}, \{2\}$*. Misalkan* $A = M = \{0,1\}$ *sehingga* *diperoleh* $\underline{\rho}(A) = \{0,1\} = \underline{\rho}(M)$ *dan* $\underline{\rho}(A) = \{0,1\} = \underline{\rho}(M)$. *Dengan demikian,* $\rho(A) = (\{0,1\},\{\overline{0,1}\})$ *dan* $\rho(M) = (\{0,1\},\{\overline{0},1\})$. *Dapat dilihat bahwa* $\rho(A), \rho(B)$ *merupakan ideal kasar dari* R. *Sehingga diperoleh* $\rho(M) \subset \rho(A) \subset R$. *Dengan demikian,* $\rho(M)$ *merupakan ideal maksimal kasar dari hemiring* $R = Z_3$.

Selanjutnya, akan diberikan definisi dari hemiring Noether kasar dan sifat terkaitnya.

Definisi 4.5. *Misalkan* $A_1, A_2, \ldots$ *adalah subhimpunan tak kosong dari hemiring* R. *Selanjutnya, misalkan* $\rho(A_1), \rho(A_2), \ldots$ *adalah ideal kasar dari* R. R *disebut hemiring Noether kasar jika ideal kasar dari* R *memenuhi kondisi rantai naik yaitu* $\rho(A_1) \subseteq \rho(A_2) \subseteq \ldots$.

Proposisi 4.6. *Misalkan* R *adalah hemiring.* R *dikatakan hemiring Noether kasar kiri jika dan hanya jika pada setiap keluarga ideal-ideal kasar kiri di* R *terdapat elemen maksimal.*

Bukti. ($\Rightarrow$) Misal Λ adalah keluarga dari ideal-ideal kasar kiri di R. Selanjutnya, ambil sebarang $\rho(A_1) \in \Lambda$. Dalam kasus ini yang dapat terjadi adalah $\rho(A_1)$ adalah elemen maksimal di Λ atau terdapat $\rho(A_2) \in \Lambda$ yang memuat $\rho(A_1)$ sedemikian rupa sehingga $\rho(A_1) \subset \rho(A_2)$. Jika $\rho(A_1)$ elemen maksimal di Λ, maka bukti selesai. Jika $\rho(A_1)$ bukan elemen maksimal di Λ, maka $\rho(A_2)$ elemen maksimal di Λ atau terdapat $\rho(A_3) \in \Lambda$ sedemikian rupa sehingga $\rho(A_2) \subset \rho(A_3)$. Proses ini dapat terus dilanjutkan dan dijamin akan berhenti karena R memenuhi syarat rantai naik.

($\Leftarrow$) Karena pada setiap keluarga ideal-ideal kasar kiri di R terdapat elemen maksimal dengan kata lain, $\rho(A_1) \subset \rho(A_2) \subset \ldots$, maka R memenuhi kondisi rantai naik atau R adalah hemiring Noether kiri. □

5 KESIMPULAN

Berdasarkan pemaparan diatas, telah didefinisikan ideal prima dan ideal maksimal pada hemiring kasar. Selanjutnya, diberikan contoh terkait ideal prima dan ideal maksimal dari hemiring kasar, sehingga diperoleh teorema terkait ideal prima kasar dan ideal maksimal kasar dengan ρ memenuhi suatu syarat. Kemudian, mendefinisikan hemiring Noether kasar dan menunjukkan sifat dari hemiring Noether kasar yang merupakan perumuman dari hemiring Noether.

.

REFERENSI

[1] Ali, M.I., Shabir, M. dan Tanveer, S., Roughness in Hemirings. *Neural Comput & Applic* **21** (2012), 171-180.
[2] Davvaz, B., Roughness in Rings. *Information Science*, **164** (2004), 147-163.
[3] Golan, J.S., *Semiring and Their Application, in : Springer Science and Business Media*, B.V, 1999.
[4] Miao, D., Han. S., Li, D. dan Sun, L., Rough Group, Rough Subgroup and Their Properties. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, **3641** (2005), 104-113.

[5] Pawlak, Z., Rough Sets. *International Journal of Computer and Information Science*, **11(5)** (1982), 341-356.
[6] Yamak, S., Kazanci, O. dan Davvaz, B., Generalized Lower and Upper Approxiomations in A Ring. *Information Science*, **180** (2010), 1759-1768.
[7] Zhang, Q.F., Fu A.M. dan Zhao, S.X., *Rough Modules And Their Some Properties, in : Fifth International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, Dalian, 2006.

Fakhry Asad Agusfrianto* (Penulis Korespondensi)
Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Jakarta, Indonesia
fakhry_asad@yahoo.com

Desfan Hafifulloh
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Lampung, Indonesia
desfanhafifulloh15@gmail.com

Bhayu Phermana Sachty Muktar
Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Jakarta, Indonesia
bhayupsm2@gmail.com