

**MODEL MATEMATIKA TRANSMISI PENYAKIT
FRAMBUSIA MELALUI KONTAK ANTAR INDIVIDU
BERLESI DAN LALAT SEBAGAI VEKTOR PEMBAWA
(MATHEMATICAL MODELLING OF TRANSMISSION
YAWS BY DIRECT CONTACT AND FLIES AS A VECTOR)**

FAIZAH AZZAHRA, LINA ARYATI

Abstract. This study introduces a mathematical model for the spread of yaws involving the presence of flies as a vector. The population in the model is divided into 9 compartments, namely: *Susceptible*, *Exposed*, *Infected in primary stadium*, *Infected in latent 1st stadium*, *Infected in secondary stadium*, *Infected in latent 2nd stadium*, *infected in tertiary stadium*, *Susceptible flies*, and *Infected flies*. This study aims to build a model involving flies on the spread of yaws. After finding the equilibrium point and calculating the basic reproduction number, the stability is calculated. Finally, numerical simulations and sensitivity analysis were carried out to determine the most influential parameters and the impact of interactions with flies in making policies on controlling the spread of yaws. The results show that treatment with treatment could reduce the spread of yaws. Treatment follow morges strategy which is carried out every 6 months in endemic areas that are targeted for yaws eradication. The result show threshold to detect yaws eradication based on number interaction, treatment and included parameters. Control of sanitation and interactions with yaws latent patient is needed so that disease-free conditions are met.

Keywords: Yaws, Flies, Mathematical Model, Stability, Sensitivity Analysis.

Abstrak. Pada tesis ini, dikembangkan sebuah model matematika penyebaran penyakit frambusia dengan melibatkan adanya vektor lalat. Populasi pada model dibagi menjadi 9 kompartemen yaitu: *Susceptible*, *Exposed*, *Infected in primer stadium*, *Infected in laten 1 stadium*, *Infected in secondary stadium*, *Infected in laten 2 stadium*, *infected in tertiary stadium*, *Susceptible flies*, dan *Infected flies*. Penelitian ini bertujuan untuk membangun sebuah model yang melibatkan lalat serta dampak interaksi lalat terhadap penyebaran penyakit frambusia. Setelah mencari titik ekuilibrium dan menghitung bilangan reproduksi dasar, selanjutnya diselidiki kestabilannya. Terakhir, dilakukan simulasi numerik serta analisis sensitivitas untuk mengetahui parameter yang paling berpengaruh dan dampak interaksi dengan lalat dalam mengambil kebijakan pada pengendalian penyebaran penyakit frambusia. Hasil yang diperoleh bahwa pengobatan dengan strategi morges dapat menekan angka penyebaran penyakit frambusia. Pengobatan dengan strategi morges yang dilakukan dalam waktu 6 bulan sekali pada wilayah yang menjadi target eradikasi frambusia, dapat memberantas penyakit frambusia apabila jumlah interaksi dengan lalat terinfeksi tidak berada pada jumlah yang cukup untuk menyebabkan penyakit endemik. Pengendalian pengobatan yang terus dilakukan serta pengendalian sanitasi dan interaksi dengan vektor-vektor pembawa penyakit frambusia perlu dilakukan agar dipenuhi kondisi bebas penyakit.

Kata-kata kunci: Frambusia, Lalat, Model Matematika, Stabilitas, Analisis Sensitivitas.

1. PENDAHULUAN

Yaws adalah penyakit infeksi kronis yang menyebar dari kulit ke kulit melalui kontak (biasanya terjadi pada anak-anak). Penyakit ini menyerang kulit, tulang, tulang rawan, dan persendian [9]. Jika tidak diobati, penyakit ini dapat mengganggu fungsi tubuh, merusak wajah, kesulitan berjalan, bahkan kebutaan [9]. Pada stadium lanjut dapat menyebabkan kecacatan dan sulit bergerak [9].

Lesi Yaws dapat muncul pada kulit pasien secara berkala selama beberapa tahun [12]. Yaws adalah penyakit infeksi kronis yang jika diabaikan dapat menyebabkan epidemi kronis. Oleh karena itu, pengobatan dini dan pencegahan penularan sangat diperlukan agar cacar air tidak menimbulkan penderitaan yang berlebihan akibat penyakit. Lebih lanjut, berdasarkan artikel Infectious Disease oleh WHO penyakit frambusia adalah penyakit yang menjadi target terdekat di dunia yang ingin diberantas [15]. Namun, penyakit ini masih jarang diketahui dan belum banyak penelitian yang membahas tentang yaws di perguruan tinggi dalam negeri. Karena masih sedikitnya penelitian yang meneliti tentang yaws di Indonesia, maka penulis ingin mengembangkan penelitian terkait yaws di Indonesia.

Kimball (2022) mengembangkan model deterministik khusus untuk eliminasi yaws dengan membedakan kompartemen menjadi terpapar, laten 1, laten 2, dan tiga tahap yaws, yang kemudian digunakan untuk membandingkan keefektifan strategi pengobatan TTT dan TCT [3]. Model deterministik yang ada saat ini hanya menggunakan kontak langsung dari kulit ke kulit dalam proses penularan penyakit. Dikutip dari artikel Manual of Entomology and Pest Management oleh Highley (1989), dan dokumen Menteri Kesehatan RI no. 8 (2017) bahwa lalat merupakan vektor penyakit yaws.

Berdasarkan analisis mikroskopis, terdapat pergerakan TPE hingga 2 jam di dalam mulut lalat, namun bakteri ini tidak ditemukan di dalam usus lalat [15]. Berdasarkan hasil penelitian dari Journal eBioMedicine (Bagian dari The Lancet Discovery Science) oleh Knauff (2016) dan artikel Flies and Yaws oleh Stamm (2016), DNA bakteri *treponema pallidum* ditemukan pada 17-24% lalat yang ditangkap secara liar di wilayah Manyara, Tanzania. Hasil temuan Stamm (2016) ini mendukung bahwa lalat berperan dalam penularan penyakit yaws, sekaligus menjadi rute teoritis baru dalam penularan antar spesies *treponema*. Hal ini menjadi dasar penulis untuk menambahkan kompartemen lalat sebagai vektor pembawa yaw ke dalam model matematika epidemiologi [3]. Tesis ini bertujuan untuk mengembangkan penelitian epidemiologi hyphenation terkait yaws dengan menambahkan kompartemen lalat yang terinfeksi sebagai vektor yang membawa yaws ke dalam model deterministik penularan yaws [3].

2. PEMBENTUKAN MODEL MATEMATIKA

Bakteri *Treponema Pallidum subspecies Pertenuae* merupakan penyebab penyakit frambusia. Dikarenakan ukuran dan massa tubuh yang kecil, bakteri ini tidak dapat dilihat dengan mikroskop biasa, melainkan perlu menggunakan mikroskop gelap ([7]). Bakteri ini tipis, seperti benang-benang spiral berwarna silver, bergerak dengan gerakan berputar dengan kecepatan yang khas. Bakteri *Treponemna Pallidum subspecies pertenuae* (TPE) ini tidak menyebabkan infeksi bawaan karena bakteri ini tidak dapat memasuki plasenta. Bakteri ini memunculkan lesi-lesi pada kulit, menyerang tulang dan tulang rawan, tetapi tidak ke jaringan atau organ yang lebih dalam. Bakteri TPE berkembang biak dengan sangat lambat (setiap 30-33 jam sekali) pada tubuh manusia dan hewan terinfeksi.

Penelitian ini memodifikasi model deterministik Kimball (2022) dengan menambahkan kompartemen lalat. Pada model ini, populasi manusia terbagi dalam 7 kompartemen mengacu pada model Kimball (2022). Kompartemen individu rentan (S_h) yaitu jumlah individu yang memiliki luka terbuka, lecet, atau goresan pada kulit sehingga memungkinkan bakteri frambusia masuk dan berperan sebagai patogen. Kompartemen individu terpapar (E_h) adalah jumlah individu yang terpapar penyakit frambusia (dalam masa inkubasi). Kompartemen individu pengidap frambusia primer (Y_1) adalah jumlah individu yang menunjukkan gejala frambusia stadium primer. Kompartemen individu dalam stadium laten 1 (L_1) adalah jumlah individu yang sedang mengalami masa laten 1, yaitu masa dimana individu tidak menunjukkan gejala klinis seperti munculnya lesi-lesi baru, namun bakteri masih aktif dan merusak organ dalam. Kompartemen individu pengidap frambusia sekunder (Y_2) adalah individu yang menunjukkan gejala klinis penyakit frambusia stadium sekunder. Kompartemen individu dalam stadium laten 2 (L_2) adalah jumlah individu pada masa stadium laten 2, yaitu masa dimana tidak muncul lesi baru tetapi bakteri merusak organ di dalam pada tingkat yang lebih parah karena semakin banyak dan menyebar. Kompartemen individu pengidap frambusia tersier (Y_3) adalah jumlah individu yang mengalami stadium lanjut (stadium tersier) frambusia, Stadium frambusia tersier hanya terjadi pada sangat

sedikit orang dan dapat menyebabkan kecacatan. Jumlah total individu dalam populasi manusia dinotasikan dengan N .

Populasi lalat terbagi dalam 2 kompartemen, yaitu: Kompartemen lalat rentan (S_f) dan kompartemen lalat terinfeksi (I_f). Lalat terinfeksi adalah lalat yang membawa bakteri treponema pallidum di mulutnya sehingga memungkinkan terjadinya penularan frambusia. Jumlah keseluruhan lalat dalam populasi lalat dinotasikan dengan N_f .

Jumlah individu dan jumlah lalat pada masing-masing kompartemen dapat mengalami perubahan setiap saat. Oleh sebab itu, didefinisikan variabel-variabel berikut:

Perubahan jumlah individu dipengaruhi oleh adanya faktor-faktor yang menyebabkan individu masuk atau keluar kompartemen. Oleh sebab itu, didefinisikan parameter - parameter yang menyatakan laju perubahan masuk atau keluarnya individu ke dalam suatu kompartemen. Parameter parameter yang digunakan dalam model epidemiologi frambusia dengan vektor lalat disajikan pada Tabel 1.

Berdasarkan fakta medis, studi literatur, dan nilai parameter yang telah diberikan, dibentuk kompartemen model penyebaran penyakit frambusia dengan vektor lalat seperti pada gambar 1.

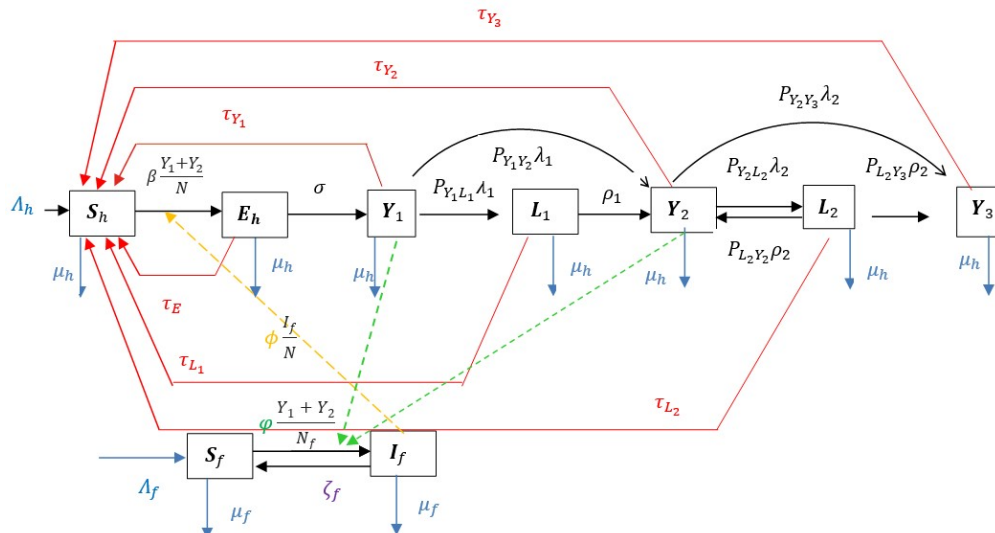


FIGURE 1. Model Transmisi Penyakit Frambusia dengan Kompartemen Lalat sebagai Vektor

Sistem persamaan diferensial untuk penyebaran penyakit frambusia dengan vektor pembawa lalat dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dE_h}{dt} = \left(\beta \frac{Y_1 + Y_2}{N} + \phi \frac{I_f}{N} \right) S_h - (\tau_E + \sigma + \mu_h) E_h \tag{2.1}$$

TABEL 1. Parameters of Yaws Transmission Mathematical Model with flies

Symbol	Definition	Symbol	Definition
Λ_h	Rate kelahiran manusia	μ_h^{-1}	Ekspektasi rentang hidup manusia
β	Rate transmisi terpapar bakteri frambusia	σ^{-1}	Panjang masa inkubasi
λ_i^{-1}	Lama stadium frambusia ke- i , $i = 1, 2$	ρ_i^{-1}	Panjang masa laten ke- i , $i = 1, 2$
$P_{Y_1Y_2}$	Probabilitas perkembangan penyakit secara langsung dari stadium primer ke stadium sekunder (tidak melalui masa laten)	$P_{Y_1L_1}$	Probabilitas perkembangan penyakit dari frambusia primer ke masa laten 1
$P_{Y_2Y_3}$	Probabilitas perkembangan penyakit dari stadium sekunder ke stadium tersier secara langsung (tanpa melalui masa laten)	$P_{Y_2L_2}$	Probabilitas perkembangan penyakit dari stadium sekunder ke masa laten 2
$P_{L_2Y_2}$	Probabilitas kambuhnya penyakit dari masa laten 2 ke stadium sekunder (terinfeksi ke stadium sekunder kedua kalinya)	$P_{L_2Y_3}$	Probabilitas perkembangan penyakit dari masa laten 2 ke stadium tersier
τ_{Y_i}	Rate kesembuhan (setelah pengobatan) individu yang ada pada stadium ke i , $i = 1, 2, 3$	τ_{L_i}	Rate kesembuhan (setelah pengobatan) individu yang ada pada masa laten ke i , $i = 1, 2, 3$
Λ_f	Rate kelahiran lalat	μ_f^{-1}	Ekspektasi hidup lalat
φ_{Y_i}	Rate terinfeksinya lalat dari individu pengidap frambusia ke i	ζ_f	ate kesembuhan lalat dari infeksi (bakteri mati)
ϕ	Rate penularan penyakit melalui lalat		

$$\frac{dY_1}{dt} = \sigma E_h - (\tau_{Y_1} + \mu_h + \lambda_1)Y_1 \quad (2.2)$$

$$\frac{dY_2}{dt} = P_{Y_1Y_2}\lambda_1Y_1 + \rho_1L_1 + P_{L_2Y_2}\rho_2L_2 - (\lambda_2 + \tau_{Y_2} + \mu_h)Y_2 \quad (2.3)$$

$$\frac{dY_3}{dt} = P_{L_2Y_3}\rho_2L_2 + P_{Y_2Y_3}\lambda_2Y_2 - (\tau_{Y_3} + \mu_h)Y_3 \quad (2.4)$$

$$\frac{dL_1}{dt} = P_{Y_1L_1}\lambda_1Y_1 - (\tau_{L_1} + \mu_h + \rho_1)L_1 \quad (2.5)$$

$$\frac{dL_2}{dt} = P_{Y_2 L_2} \lambda_2 Y_2 - (\tau_{L_2} + \mu_h + \rho_2) L_2 \quad (2.6)$$

$$\frac{dI_f}{dt} = \varphi \frac{Y_1 + Y_2}{N_f} S_f - (\zeta_f + \mu_f) I_f \quad (2.7)$$

$$\frac{dS_h}{dt} = \Lambda_h + \tau_{Y_1} Y_1 + \tau_{Y_2} Y_2 + \tau_{Y_3} Y_3 + \tau_E E_h + \tau_{L_1} L_1 + \tau_{L_2} L_2 \quad (2.8)$$

$$- \left(\beta \frac{Y_1 + Y_2}{N} + \mu_h + \phi \frac{I_f}{N} \right) S_h \quad (2.9)$$

$$\frac{dS_f}{dt} = \zeta_f I_f + \Lambda_f + \left(-\varphi \frac{Y_1 + Y_2}{N_f} - \mu_f \right) S_f. \quad (2.10)$$

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda_h - \mu_h(N) \quad (2.11)$$

$$\frac{dN_f}{dt} = \Lambda_f - \mu_f(N_f). \quad (2.12)$$

$$(2.13)$$

2.1. Bilangan Reproduksi Dasar. Pada paper ini digunakan teorema Driessche tentang membuat bilangan reproduksi dasar [1]. Pertama, solusi dari sistem persamaan (2.1) to (2.10) dengan titik awal $S_h(0) = S_{h_0}$, $E_h(0) = E_{h_0}$, $Y_1(0) = Y_{1_0}$, $L_1(0) = L_{1_0}$, $Y_2(0) = Y_{2_0}$, $L_2(0) = L_{2_0}$, $Y_3(0) = Y_{3_0}$, $S_f(0) = S_{f_0}$, $I_f(0) = I_{f_0}$ ada pada domain \mathcal{D} yang telah ditentukan dan dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathbf{x} = [E_h, Y_1, L_1, Y_2, L_2, Y_3, I_f, S_h, S_f]^T, \quad (2.14)$$

dan

$$\mathcal{D} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{R}^{9+} \left| \begin{array}{l} E_h, Y_1, L_1, Y_2, L_2, Y_3, I_f, S_h, S_f \geq 0 \\ 0 < N \leq \frac{\Lambda_h}{\mu_h} \\ 0 < N_f \leq \frac{\Lambda_f}{\mu_f} \end{array} \right. \right\}. \quad (2.15)$$

Titik equilibrium bebas penyakit untuk sistem persamaan (2.1) - (2.10), bisa ditulis sebagai $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{E}_h, \hat{Y}_1, \hat{L}_1, \hat{Y}_2, \hat{L}_2, \hat{Y}_3, \hat{I}_f, \hat{S}_h, \hat{S}_f)^T$ dengan

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{\Lambda_h}{\mu_h}, \frac{\Lambda_f}{\mu_f} \right)^T. \quad (2.16)$$

Perhitungan bilangan reproduksi dasar dengan metode lain akan lebih sulit dilakukan untuk model dengan banyak kompartemen dibandingkan dengan metode generasi berikutnya yang berfokus pada kompartemen terinfeksi saja. Metode generasi berikutnya akan mereduksi kompartemen yang digunakan dalam perhitungan bilangan reproduksi dasar. Oleh sebab itu dipilih metode matriks generasi berikutnya dalam penentuan bilangan reproduksi dasar.

Didefinisikan

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_9)^T = (E_h, Y_1, L_1, Y_2, L_2, Y_3, I_f, S_h, S_f)^T \in \mathcal{R}^{9+}.$$

Untuk mencari bilangan reproduksi dasar terlebih dahulu Sistem Persamaan (2.1) sampai (2.10) diurutkan dari kelompok terinfeksi dan dilanjutkan ke kelompok tidak terinfeksi. Kelompok terinfeksi terdiri dari 7 kompartemen, yaitu $E_h, Y_1, L_1, Y_2, L_2, Y_3, I_f$. Kelompok tidak terinfeksi terdiri dari 2 kompartemen, yaitu S_h, S_f .

Sistem persamaan (2.1)-(2.10) dapat kita tulis ke dalam bentuk

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{F}(\mathbf{x}) - \mathcal{V}(\mathbf{x}), \quad (2.17)$$

dengan

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} (\beta \frac{Y_1+Y_2}{N} + \phi \frac{I_f}{N}) S_h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi \frac{Y_1+Y_2}{N_f} S_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{V}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} v_E E_h \\ v_{Y_1} Y_1 - \sigma E_h \\ v_{Y_2} Y_2 - P_{Y_1 Y_2} \lambda_1 Y_1 - \rho_1 L_1 - P_{L_2 Y_2 \rho_2} L_2 \\ V_{Y_3} Y_3 - (P_{Y_2 Y_3} \lambda_2 Y_2 + P_{L_2 Y_3 \rho_2} L_2) \\ v_{L_1} L_1 - P_{Y_1 L_1} \lambda_1 Y_1 \\ v_{L_2} L_2 - P_{Y_2 L_2} \lambda_2 Y_2 \\ (\zeta_f + \mu_f) I_f \\ -S_1 \\ -S_2 \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

dan $v_E = (\tau_E + \sigma + \mu_h)$, $v_{Y_1} = (\tau_{Y_1} + \mu_h + \lambda_1)$, $v_{Y_2} = (\lambda_2 + \tau_{Y_2} + \mu_h)$, $v_{Y_3} = (\mu_h + \tau_{Y_3})$, $v_{L_1} = (\rho_1 + \tau_{L_1} + \mu_h)$, $v_{L_2} = (\rho_2 + \tau_{L_2} + \mu_h)$, $v_f = \mu_f + \zeta_f$, $S_1 = \Lambda_h + \tau_{Y_1} Y_1 + \tau_{Y_2} Y_2 + \tau_{Y_3} Y_3 + \tau_E E_h + \tau_{L_1} L_1 + \tau_{L_2} L_2 - \left(\beta \frac{Y_1+Y_2}{N} + \mu_h + \phi \frac{I_f}{N} \right) S_h$, and $S_2 = \zeta_f I_f + \Lambda_f + \left(-\varphi \frac{Y_1+Y_2}{N_f} - \mu_f \right) S_f$.

Matriks $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ memuat parameter yang menyebabkan infeksi baru (sumber wabah), sedangkan matriks $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ memuat parameter yang masuk dan keluar kompartemen selain karena infeksi baru (karena perkembangan penyakit, kematian, dan pengobatan).

Akan ditunjukkan bahwa Sistem (2.17) memenuhi 5 asumsi teorema Drieesche [1].

- (1) Jika $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ maka $\mathcal{F}_i(\mathbf{x}), \mathcal{V}_i^+(\mathbf{x}), \mathcal{V}_i^-(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, 9$, dengan $\mathcal{F}_i(\mathbf{x}) \in \mathcal{F}(\mathbf{x})$ pada baris ke i .

Diperhatikan bahwa untuk $\mathbf{x} = (E_h, Y_1, L_1, Y_2, L_2, Y_3, I_f, S_h, S_f)^T \geq \mathbf{0}$ berlaku

$$\mathcal{V}^-(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} (\tau_E + \sigma + \mu_h) E_h \\ (\tau_{Y_1} + \mu_h + \lambda_1) Y_1 \\ (\lambda_2 + \tau_{Y_2} + \mu_h) Y_2 \\ (\mu_h + \tau_{Y_3}) Y_3 \\ (\rho_1 + \tau_{L_1} + \mu_h) L_1 \\ (\rho_2 + \tau_{L_2} + \mu_h) L_2 \\ (\zeta_f + \mu_f) I_f \\ (\beta \frac{Y_1+Y_2}{N} + \mu_h + \phi \frac{I_f}{N}) S_h \\ (\varphi \frac{Y_1+Y_2}{N_f} + \mu_f) S_f \end{bmatrix}, \mathcal{V}^+(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma E_h \\ P_{Y_1 Y_2} \lambda_1 Y_1 + \rho_1 L_1 + P_{L_2 Y_2 \rho_2} L_2 \\ P_{Y_2 Y_3} \lambda_2 Y_2 + P_{L_2 Y_3 \rho_2} L_2 \\ P_{Y_1 L_1} \lambda_1 Y_1 \\ P_{Y_2 L_2} \lambda_2 Y_2 \\ 0 \\ \Lambda_h + \varrho \\ \zeta_f I_f + \Lambda_f \end{bmatrix},$$

dengan $\varrho = \tau_{Y_1} Y_1 + \tau_{Y_2} Y_2 + \tau_{Y_3} Y_3 + \tau_E E_h + \tau_{L_1} L_1 + \tau_{L_2} L_2$. Diperhatikan bahwa semua parameter bernilai nonnegatif. Akibatnya Asumsi 1 terpenuhi.

- (2) Jika $x_i = 0$ maka $\mathcal{V}_i^-(\mathbf{x}) = 0$. Khususnya jika $\mathbf{x} \in \mathbf{X}_s$ maka $\mathcal{V}_i^-(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, 7$.

Diperhatikan bahwa untuk ekuilibrium bebas penyakit diperoleh entri-entri dari $\mathcal{V}_i^-(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, 7$. Akibatnya Asumsi 2 terpenuhi.

(3) $\mathcal{F}_i(\mathbf{x}) = 0$, jika $i > 7$.

Diperhatikan bahwa $\mathcal{F}_8(\mathbf{x}) = \mathcal{F}_9(\mathbf{x}) = 0$. Assumsi 3 terpenuhi.

(4) Jika $\mathbf{x} \in \mathbf{X}_s$ maka $\mathcal{F}_i(\mathbf{x}) = 0$ dan $\mathcal{V}_i^+(\mathbf{x}) = 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, 7$.

Diperhatikan bahwa $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{X}_s$, $\mathcal{F}_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0$, dan $\mathcal{V}_i^+(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, 7$. Asumsi 4 terpenuhi.

(5) jika $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ bernilai nol maka semua nilai eigen dari $(D\mathcal{F}(\hat{\mathbf{x}}) - D\mathcal{V}(\hat{\mathbf{x}}))$ memiliki bagian real negatif.

Diperhatikan pada titik ekuilibrium bebas penyakit berlaku $\mathcal{F}(\hat{\mathbf{x}}) = 0$, akibatnya diperoleh $\dot{\mathbf{x}} = -\mathcal{V}(\hat{\mathbf{x}})$, dan $\dot{\mathbf{y}} = -D\mathcal{V}(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{y}$. Diperhatikan bahwa $D\mathcal{V}(\hat{\mathbf{x}})$ dapat dipartisi kedalam bentuk berikut:

$$D\mathcal{V}(\hat{\mathbf{x}}) = \left[\begin{array}{c|c} V & 0 \\ \hline J_3 & J_4 \end{array} \right].$$

Semua nilai eigen dari $-D\mathcal{V}(\hat{\mathbf{x}})$ memiliki bagian real negatif sebagai berikut

$$\begin{aligned} \lambda &= -v_E, \lambda = -v_{Y_1}, \lambda = -v_{Y_3}, \lambda = -v_{L_1}, \lambda = -\zeta_f - \mu_f, \lambda = -\mu_h, \lambda = -\mu_f, \\ \lambda &= -(v_{Y_2} + v_{L_2}) + \sqrt{(v_{Y_2} + v_{L_2})^2 - 4(v_{Y_2}v_{L_2} - \varsigma_2\varsigma_6)}, \\ \lambda &= -(v_{Y_2} + v_{L_2}) - \sqrt{(v_{Y_2} + v_{L_2})^2 - 4(v_{Y_2}v_{L_2} - \varsigma_2\varsigma_6)}. \end{aligned}$$

Akibatnya, semua nilai eigen dari $(D\mathcal{F}(\hat{\mathbf{x}}) - D\mathcal{V}(\hat{\mathbf{x}}))$ bernilai negatif, sehingga asumsi 5 terpenuhi.

Diperhatikan bahwa Kelima Asumsi terpenuhi, sehingga berdasarkan Teorema Driessche [1], diperoleh

$$D\mathcal{F}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D\mathcal{V}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} V & 0 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix}$$

dengan,

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \beta & 0 & 0 & 0 & \phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi & \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v_E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma & v_{Y_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varsigma_1 & v_{Y_2} & 0 & -\rho_1 & -\varsigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\varsigma_3 & v_{Y_3} & 0 & -\varsigma_4 & 0 \\ 0 & -\varsigma_5 & 0 & 0 & v_{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varsigma_6 & 0 & 0 & v_{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_f \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

dan $v_E = \tau_E + \sigma + \mu_h \geq 0$, $\varsigma_1 = P_{Y_1Y_2}\lambda_1$, $v_{Y_1} = \tau_{Y_1} + \mu_h + \lambda_1 \geq 0$, $\varsigma_2 = P_{L_2Y_2}\rho_2$, $v_{Y_2} = \tau_{Y_2} + \lambda_2 + \mu_h \geq 0$, $\varsigma_3 = P_{Y_2Y_3}\lambda_2$, $v_{L_1} = \rho_1 + \tau_{L_1} + \mu_h \geq 0$, $\varsigma_4 = P_{L_2Y_3}\rho_2$, $v_{L_2} = \rho_2 + \tau_{L_2} + \mu_h \geq 0$, $\varsigma_5 = P_{Y_1L_1}\lambda_1$, $v_{Y_3} = \tau_{Y_3} + \mu_h \geq 0$, $\varsigma_6 = P_{Y_2L_2}\lambda_2$, $v_f = \zeta_f + \mu_f \geq 0$.

Akan ditunjukkan bahwa V adalah matriks-M non singular. Diperhatikan bahwa V dapat dinyatakan sebagai $sI - P$, dengan $s = v_E + v_{Y_1} + v_{Y_2} + v_{Y_3} + v_{L_1} + v_{L_2} + v_f$,

dan matriks P berikut

$$P = \begin{pmatrix} \vartheta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma & \vartheta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varsigma_1 & \vartheta_3 & 0 & \rho_1 & \varsigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varsigma_3 & \vartheta_4 & 0 & \varsigma_4 & 0 \\ 0 & \varsigma_5 & 0 & 0 & \vartheta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varsigma_6 & 0 & 0 & \vartheta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta_7 \end{pmatrix}$$

dengan $\vartheta_1 = s - v_E$, $\vartheta_2 = s - v_{Y_1}$, $\vartheta_3 = s - v_{Y_2}$, $\vartheta_4 = s - v_{Y_3}$, $\vartheta_5 = s - v_{L_1}$, $\vartheta_6 = s - v_{L_2}$, $\vartheta_7 = s - v_f$.

Diperhatikan bahwa $P = [p_{ij}]$, dengan $p_{ij} \geq 0$ untuk setiap i, j . Nilai eigen dari matriks P adalah $\lambda_{p1} = s - v_E$, $\lambda_{p2} = s - v_{Y_1} < s$, $\lambda_{p3} = s - v_{Y_3} < s$, $\lambda_{p4} = s - v_f < s$, $\lambda_{p5} = s - v_{L_1} < s$, $\lambda_{p6} < s$, $\lambda_{p7} < s$. Diperhatikan bahwa $s > \rho(P)$, akibatnya berdasarkan Definisi M matriks non singular [1], V adalah matriks-M non singular. Matriks V^{-1} yang diperoleh adalah sebagai berikut:

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{b}{c} & \frac{1}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{bt\omega_2}{ac} & \frac{-t\omega_2}{c} & \psi_1 & 0 & \psi_2 & \psi_3 & 0 \\ \frac{b\omega_1}{ac} & \frac{-\omega_1}{c} & \psi_4 & \frac{1}{m} & \psi_5 & \psi_6 & 0 \\ \frac{bq}{acr} & \frac{-q}{cr} & 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ -\frac{bs\omega_2}{ac} & \frac{s\omega_2}{c} & \psi_7 & 0 & \psi_8 & \psi_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{u} \end{pmatrix}$$

dengan $\psi_1 = \frac{-t}{hs - ft}$, $\psi_2 = \frac{gt}{hrs - frt}$, $\psi_3 = \frac{h}{hs - ft}$, $\psi_4 = \frac{-ps + jt}{hms - fmt}$, $\psi_5 = \frac{gps - gjt}{hmrs - fmrt}$, $\psi_6 = \frac{-hj + fp}{hms - fmt}$, $\psi_7 = \frac{s}{hs - ft}$, $\psi_8 = \frac{-gs}{hrs - frt}$, $\psi_9 = \frac{-f}{hs - ft}$, $a = v_E$, $b = -\sigma$, $c = v_{Y_1}$, $d = -P_{Y_1 Y_2} \lambda_1$, $f = v_{Y_2}$, $g = -\rho_1$, $h = -P_{L_2 Y_2} \rho_2$, $j = -P_{Y_2 Y_3} \lambda_2$, $m = v_{Y_3}$, $p = -P_{L_2 Y_3} \rho_2$, $q = -P_{Y_1 L_1} \lambda_1$, $r = v_{L_1}$, $s = -P_{Y_2 L_2} \lambda_2$, $t = v_{L_2}$, $u = v_f$, $\omega_1 = \frac{gpqs - dprs - gjqt + djrt}{hmrs - fmrt}$, dan $\omega_2 = \frac{qg - dr}{hrs - frt}$.

Akibatnya hanya terdapat dua kemungkinan nilai eigen tak nol dari matriks FV^{-1} . Nilai-nilai eigen dari matriks FV^{-1} adalah

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0, \\ \lambda_6 &= \frac{\beta\sigma}{2v_E v_{Y_1}}(1 + k_{Y_2}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta^2\sigma^2}{v_E^2 v_{Y_1}^2} (1 + k_{Y_2})^2 + \left(\frac{4\phi\sigma\varphi}{v_f v_E v_{Y_1}}\right) (1 + k_{Y_2})} \\ \lambda_7 &= \frac{\beta\sigma}{2v_E v_{Y_1}}(1 + k_{Y_2}) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta^2\sigma^2}{v_E^2 v_{Y_1}^2} (1 + k_{Y_2})^2 + \left(\frac{4\phi\sigma\varphi}{v_f v_E v_{Y_1}}\right) (1 + k_{Y_2})}\end{aligned}\quad (2.20)$$

dengan $k_{Y_2} = -\frac{v_{L_2}\lambda_1}{v_{L_1}}r^*$, $\beta \geq 0, \sigma \geq 0, v_E > 0, v_{Y_1} > 0, v_{L_1} > 0, v_{L_2} \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \phi \geq 0, \varphi \geq 0, \zeta_f \geq 0, \mu_f \geq 0, r^* = \frac{\rho_1 P_{Y_1 L_1} + P_{Y_1 Y_2} v_{L_1}}{P_{L_2 Y_2} \rho_2 P_{Y_2 L_2} \lambda_2 - v_{Y_2} v_{L_2}} \leq 0$.

Diperhatikan bahwa $\lambda_{6,7} \geq 0$, dan $\lambda_6 > \lambda_7$. Berdasarkan Definisi \mathcal{R}_0 oleh Driessche [1], diperoleh $\mathcal{R}_0 = \lambda_6 = \max\{|\lambda_i|\}$ dengan λ_i adalah nilai eigen dari matriks FV^{-1} dan $i = 1, 2, \dots, 7$. Lebih lanjut, dapat ditulis

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta\sigma}{2v_E v_{Y_1}}(1 + k_{Y_2}) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta^2\sigma^2}{v_E^2 v_{Y_1}^2} (1 + k_{Y_2})^2 + \left(\frac{4\phi\sigma\varphi}{v_f v_E v_{Y_1}}\right) (1 + k_{Y_2})}. \quad (2.21)$$

Berdasarkan definisi bilangan reproduksi dasar, rata-rata kasus sekunder yang disebabkan satu individu terinfeksi menghasilkan infeksi baru selama masa infeksinya kepada seluruh kompartemen rentan sebesar \mathcal{R}_0 . Nilai \mathcal{R}_0 bergantung pada nilai parameter-parameter model.

2.2. Titik Equilibrium. Titik ekuilibrium digunakan untuk mengindikasikan kemungkinan penyebaran penyakit. Untuk mencari titik ekuilibrium, maka dilakukan perhitungan untuk $\dot{S}_h = \dot{E}_h = \dot{Y}_1 = \dot{L}_1 = \dot{Y}_2 = \dot{L}_2 = \dot{Y}_3 = \dot{S}_f = \dot{I}_f = 0$. Diperoleh titik ekuilibrium

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\hat{E}_h, \hat{Y}_1, \hat{L}_1, \hat{Y}_2, \hat{L}_2, \hat{Y}_3, \hat{I}_f, \hat{S}_h, \hat{S}_f \right)^T, \quad (2.22)$$

dengan nilai \hat{Y}_1 adalah

$$\begin{aligned}Y_{1_1} &= 0, Y_{1_2} = \frac{-c}{b} \text{ untuk } a = 0, b < 0, c > 0, \text{ atau} \\ Y_{1_3} &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ untuk } a < 0, c > 0, b < 0.\end{aligned}\quad (2.23)$$

Lebih lanjut kompartemen yang lain dapat dinyatakan dalam \hat{Y}_1 , yaitu

$$\hat{E}_h = k_{E_h} \hat{Y}_1, \hat{L}_1 = k_{L_1} \hat{Y}_1, \hat{Y}_2 = k_{L_2} \hat{Y}_1, \hat{L}_2 = k_{L_2} \hat{Y}_1, \hat{Y}_3 = k_{Y_3} \hat{Y}_1, \hat{I}_f = \frac{k_{I_f} \hat{Y}_1}{1 + N_f^{-1} k_{I_f} \hat{Y}_1},$$

$$\hat{S}_h = \frac{k_{S_h} \hat{Y}_1 (N + k_{3B})}{k_{1B} \hat{Y}_1^2 + k_{2B} \hat{Y}_1}, \hat{S}_f = \frac{1}{N_f^{-1} + k_{S_f} \hat{Y}_1}, \text{ dengan } a = (Q - k_{S_h}) k_{1B} \in R,$$

$$b = (Q - k_{S_h}) k_{2B} + \Lambda_h k_{1B} - \mu_h k_{S_h} k_{3B} \in R, c = (-k_{S_h} + k_{2B}) \Lambda_h \in R,$$

$$\begin{aligned}
Q &= \tau_{Y_1} + \tau_{Y_2}k_{Y_2} + \tau_{Y_3}k_{Y_3} + \tau_E k_{E_h} + \tau_{L_1}k_{L_1} + \tau_{L_2}k_{L_2} > 0, k_{E_h} = \frac{v_{Y_1}}{\sigma} > 0, \\
k_{L_1} &= \frac{P_{Y_1 L_1} \lambda_1}{v_{L_1}} > 0, k_{Y_2} = \frac{v_{L_2} \lambda_1}{v_{L_1}} (-r^*) > 0, k_{L_2} = \frac{P_{Y_2 L_2} \lambda_2 \lambda_1}{v_{L_1}} (-r^*) > 0, \\
k_{Y_3} &= \frac{P_{L_2 Y_3} \rho_2 k_{L_2} + P_{Y_2 Y_3} \lambda_2 k_{Y_2}}{v_{Y_3}} > 0, k_{S_h} = v_E k_{E_h} > 0, k_{I_f} = \varphi \frac{1 + k_{Y_2}}{v_f} \geq 0, \\
k_{S_f} &= N_f^{-1} v_f^{-1} \varphi (1 + k_{Y_2}) > 0, k_{1B} = \beta (1 + k_{Y_2}) N_f^{-1} k_{I_f} > 0, \\
k_{2B} &= \beta (1 + k_{Y_2}) + \mu_h N N_f^{-1} k_{I_f} + \phi k_{I_f} > 0, k_{3B} = N N_f^{-1} k_{I_f} > 0, \\
v_E &= \sigma + \mu_h + \tau_E > 0, v_{Y_1} = \tau_{Y_1} + \lambda_1 + \mu_h > 0, v_{L_1} = \rho_1 + \tau_{L_1} + \mu_h > 0, \\
v_{Y_2} &= \tau_{Y_2} + \lambda_2 + \mu_h > 0, v_{L_2} = \rho_2 + \tau_{L_2} + \mu_h > 0, v_{Y_3} = \tau_{Y_3} + \mu_h > 0, \\
v_f &= \zeta_f + \mu_f > 0, \sigma > 0, \beta > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \rho_1 > 0, \rho_2 > 0, \mu_h > 0, \zeta_f > 0, \mu_f > 0, \\
\tau_E &> 0, \tau_{Y_1} > 0, \tau_{Y_2} > 0, \tau_{L_1} > 0, \tau_{L_2} > 0, \tau_{Y_3} > 0. \tag{2.24}
\end{aligned}$$

Berdasarkan teorema kestabilan Driessche, [1], diperoleh jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal dan jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka tidak stabil. Lebih lanjut, jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka Titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik lokal dan tidak stabil, jika $\mathcal{R}_0 < 1$.

3. SIMULASI NUMERIK

3.1. Simulasi Numerik Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit. Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 2, diperoleh nilai $\mathcal{R}_0 = 0.75803$. Hal ini berarti lama-kelamaan jumlah pengidap penyakit frambusia akan berkurang dan akan dicapai keadaan bebas frambusia. Berdasarkan nilai \mathcal{R}_0 , tidak perlu dilakukan pengendalian terhadap lalat sebagai vektor. Meskipun demikian, masih perlu dilakukan simulasi numerik untuk mengamati pada rentang waktu berapa lama penyakit ini akan hilang.

Lebih lanjut, diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit berikut

$$\hat{\mathbf{x}} = (\hat{E}_h; \hat{Y}_1; \hat{L}_1; \hat{Y}_2; \hat{L}_2; \hat{Y}_3; \hat{I}_f; \hat{S}_h; \hat{S}_f)^T = (0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 250.063.200.0; 237.290.666)^T. \tag{3.1}$$

Berdasarkan Teorema Driessche [1], diperoleh Titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik. Lebih lanjut, akan ditunjukkan melalui simulasi numerik gambaran kestabilannya.

Nilai awal untuk kompratemen rentan, terpapar, stadium primer, laten 1, sekunder, laten 2, dan stadium tersier berturut-turut $S_h(0) = 226,990,000$, $E_h(0) = 619$, $Y_1(0) = 26$, $L_1(0) = 519$, $Y_2(0) = 127$, $L_2(0) = 6,619$, $Y_3(0) = 16$. Lebih lanjut, nilai awal untuk lalat rentan dan lalat terinfeksi adalah $S_f(0) = 226,990,000$, $I_f(0) = 1,000$. Simulasi Numerik untuk masing-masing stadium ditunjukkan oleh Gambar 2.

Apabila setiap rate yang berpengaruh dikontrol seperti yang digunakan pada Tabel 2, maka banyaknya individu terpapar, terinfeksi stadium laten 2 dan stadium tersier akan mengalami penurunan dan penyakit lama-kelamaan akan habis seperti pada Gambar 2 bagian (a). Berdasarkan Gambar 2 bagian (a), Grafik L_2 terus mengalami penurunan hingga lama-kelamaan akan habis. Diperhatikan bahwa tidak terlihat dengan jelas fluktuatif grafik E_h, Y_1, L_1, Y_2 , dan Y_3 pada Gambar 2 bagian (a), oleh sebab

TABEL 2. Tabel Parameter Model Matematika Transmisi Frambusia

Symbol	Value	Source	Symbol	Value	Source
Λ_h	$\frac{16.2 \times 227 \times 10^3}{12}$	<i>United Nations</i> (2022)	μ_h	$\frac{1}{68 \times 12}$	<i>United Nations</i> (2022)
β	0.0166	Kimball (2022)	σ	$\frac{30}{21}$	Perine (1984)
λ_1	$\frac{1}{4}$	Perine (1984)	$P_{L_2Y_3}$	$1 - P_{L_2Y_2}$	
ρ_1	$\frac{1}{15}$	Marks (2015a)	λ_2	$\frac{1}{4}$	(Mitja, Asiedu & Mabey (2013))
ρ_2	$\frac{1}{100}$	Perine (1984)		0.12	Mitja, (2013)
$P_{Y_1L_1}$	$1 - P_{Y_1Y_2}$		$P_{Y_2Y_3}$	0.0001	Mitja, (2013)
$P_{Y_2L_2}$	$1 - P_{Y_2Y_3}$		$P_{L_2Y_2}$	[0.9999]	Mitja, (2013)
τ_{Y_1}	$\frac{0.98}{6}$	diasumsikan	τ_{Y_2}	$\frac{0.98}{24}$	diasumsikan
τ_{Y_3}	$\frac{0.98}{24}$	diasumsikan	τ_{E_h}	$\frac{0.98}{6}$	diasumsikan
τ_{L_1}	$\frac{0.98}{6}$	diasumsikan	τ_{L_2}	$\frac{0.98}{24}$	diasumsikan
Λ_f	$\frac{112 \times 30 \times 227000}{3}$	diasumsikan	μ_f	$\frac{30}{28}$	Orkin (2022)
φ	200	diasumsikan	ζ_f	$\frac{24 \times 30}{2}$	Stamm (2016)
ϕ	$\frac{1}{100}$	diasumsikan			

itu diperjelas pada Gambar 2 bagian (b). Berdasarkan Gambar 2 bagian (b), terlihat grafik E_h, L_1, Y_3 mengalami penurunan terus menerus dan lama-kelamaan habis. Pada Gambar 2 bagian (b), terlihat pula grafik Y_1 dan Y_2 sempat mengalami kenaikan hingga titik maksimalnya berturut turut pada angka 400 dan 290. Lebih lanjut, diperhatikan bahwa pada bagian (a) dan (b) tidak terlihat jelas waktu penyakit benar-benar habis, oleh sebab itu diperjelas pada Gambar 2 bagian (c). Pada Gambar 2 bagian (c) dapat

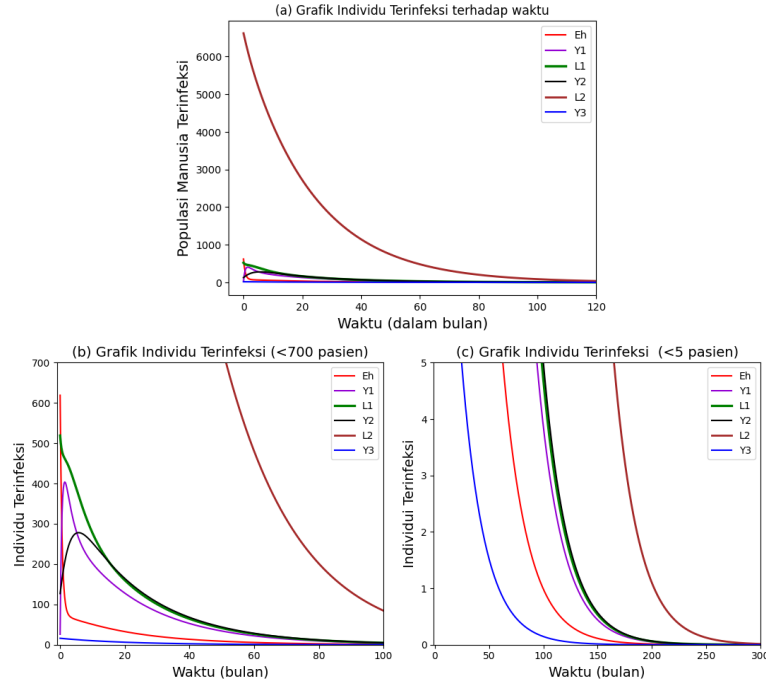


FIGURE 2. Simulasi Numerik untuk $\mathcal{R}_0 < 1$ pada Populasi Manusia Terinfeksi, Individu Terinfeksi Terpapar (E_h), Stadium Primer (Y_1), Sekunder (Y_2), Tersier (Y_3), Stadium Laten 1 (L_1), dan Stadium Laten 2 (L_2) terhadap Waktu

diamati bahwa individu terinfeksi stadium tersier akan habis pada bulan ke 150. Pada Gambar 2 bagian (c) dapat diamati pula bahwa individu terpapar akan habis pada bulan ke 180. Selain itu, Individu terinfeksi stadium primer, Individu terinfeksi laten 1, individu terinfeksi stadium sekunder akan habis pada bulan ke 200, sedangkan individu terinfeksi laten 2 akan habis pada bulan ke 280.

Pada Gambar 3 bagian (a), menggunakan laju kelahiran kasar dan angka harapan hidup manusia yang ditetapkan pada Tabel 2, diperoleh banyaknya individu rentan dan populasi manusia akan terus mengalami kenaikan, dan akan terus naik hingga stabil ketika mencapai 250.063.200 penduduk pada bulan ke 5000. Hal ini berarti populasi manusia akan tetap ada dengan rate kelahiran yang ditetapkan meski untuk beberapa abad lamanya. Diperhatikan bahwa pada Gambar 3 bagian (a) seolah grafik S_h dan N berimpit. Namun diperjelas pada Gambar 3 bagian (b) bahwa terdapat selisih jumlah penduduk pada titik awalnya, karena terdapat individu terinfeksi sebelumnya, hingga kemudian akan sama atau berimpit, dimana individu terinfeksi sudah hilang.

Pada Gambar 4 bagian (a), menggunakan rate yang ditetapkan pada Tabel 2 diperoleh Jumlah lalat terinfeksi cukup fluktuatif, yang semula turun secara drastis yang kemudian akan naik dan kembali terus-menerus turun. Diperhatikan bahwa pada

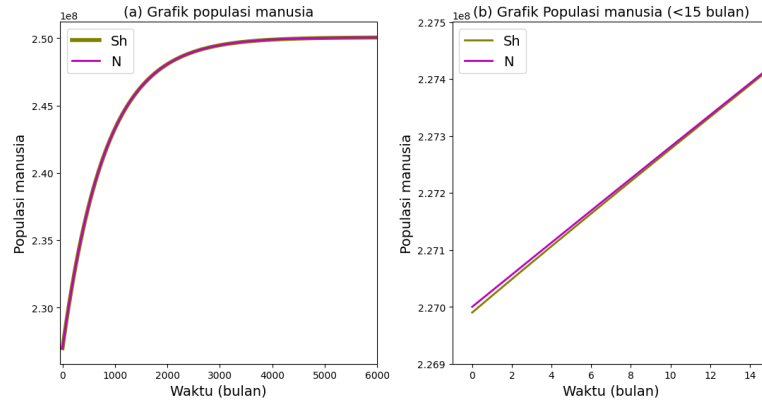


FIGURE 3. Simulasi Numerik untuk $\mathcal{R}_0 < 1$ pada Populasi Manusia Rentan (Bebas penyakit) (S_h) dan Populasi Manusia Total (N) terhadap Waktu.

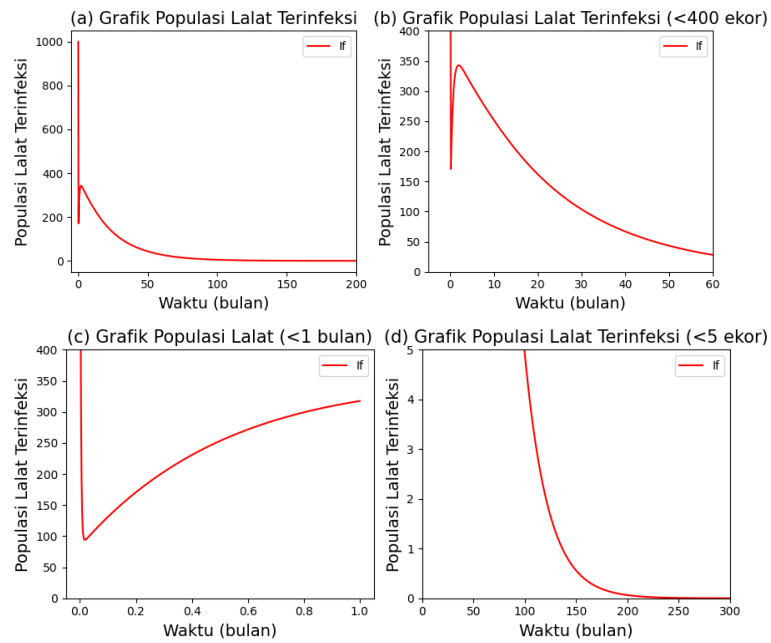


FIGURE 4. Simulasi Numerik untuk $\mathcal{R}_0 < 1$ pada Lalat Terinfeksi terhadap Waktu

Gambar 4 bagian (a) tidak dapat diamati dengan jelas jumlah lalat saat mengalami

penurunan maupun saat di puncak. Oleh sebab itu, Gambar 4 bagian (b) memperlihatkan lebih jelas bahwa sebelum terus menerus turun, lalat akan mencapai titik puncaknya di angka 349. Lebih lanjut, pada Gambar 4 bagian (c) memperlihatkan bahwa dari nilai awal lalat akan mengalami penurunan drastis pada minggu pertama hingga tersisa 99 ekor lalat, yang kemudian akan naik hingga puncaknya pada Gambar (b) yaitu pada bulan ke 5. Lebih lanjut pada bagian (a) tidak terlihat secara pasti kapan penyakit benar-benar akan hilang. Oleh sebab itu, diperjelas pada bagian (d) bahwa penyakit akan hilang pada bulan ke 250.

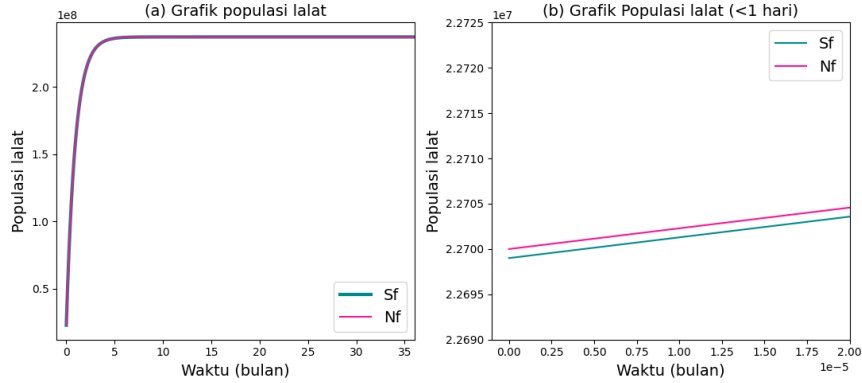


FIGURE 5. Numerical Simulation for $\mathcal{R}_0 < 1$ on Susceptible Fly Population (S_f) and Total Fly Population (N_f) against Time

Pada Gambar 5 bagian (a), terlihat banyaknya lalat rentan dan populasi lalat total akan terus naik dan seiring berjalanya waktu akan konvergen ke angka 237.290.666 juta ekor. Hal ini berarti populasi lalat rentan akan tetap ada. Berdasarkan gambar, terlihat seolah-olah grafik S_f dan N_f ini sama dan berimpit. Oleh sebab itu, diperlihatkan nilai awal dan jumlah lalat rentan serta populasi lalat total pada 1 hari pertama memiliki selisih atau perbedaan.

Berdasarkan semua simulasi, dengan parameter-parameter yang ditetapkan diperkirakan eradikasi frambusia dapat terjadi setelah 280 bulan.

3.2. Simulasi Titik Ekuilibrium Endemik. Parameter yang digunakan mengacu pada Tabel 2 dengan mengubah $\beta = 0,2661$, $\phi = 0,05$, $\varphi = 1500$, dan $\rho_2 = 110$. sehingga diperoleh $\mathcal{R}_0 = 1.09136 > 1$. Perubahan parameter tersebut mengasumsikan kejadian perkembangan penyakit di suatu wilayah dengan tingginya kontak interaksi baik secara langsung maupun tidak langsung antara penderita dan lalat terinfeksi, serta perubahan rentang masa inkubasi serta lama masa laten 2 menjadi sedikit lebih panjang.

Berdasarkan parameter yang ditetapkan, dipenuhi syarat $b^2 - 4ac = 0,000037387$, dan $-b - \sqrt{b^2 - 4ac} = -0,000444561121 < 0$ untuk $a = -5,5817 \times 10^{-11} < 0$, $b = -0,005669969694 < 0$, dan $c = 23464,7583 > 0$. Lebih lanjut, berdasarkan parameter yang ditetapkan diperoleh

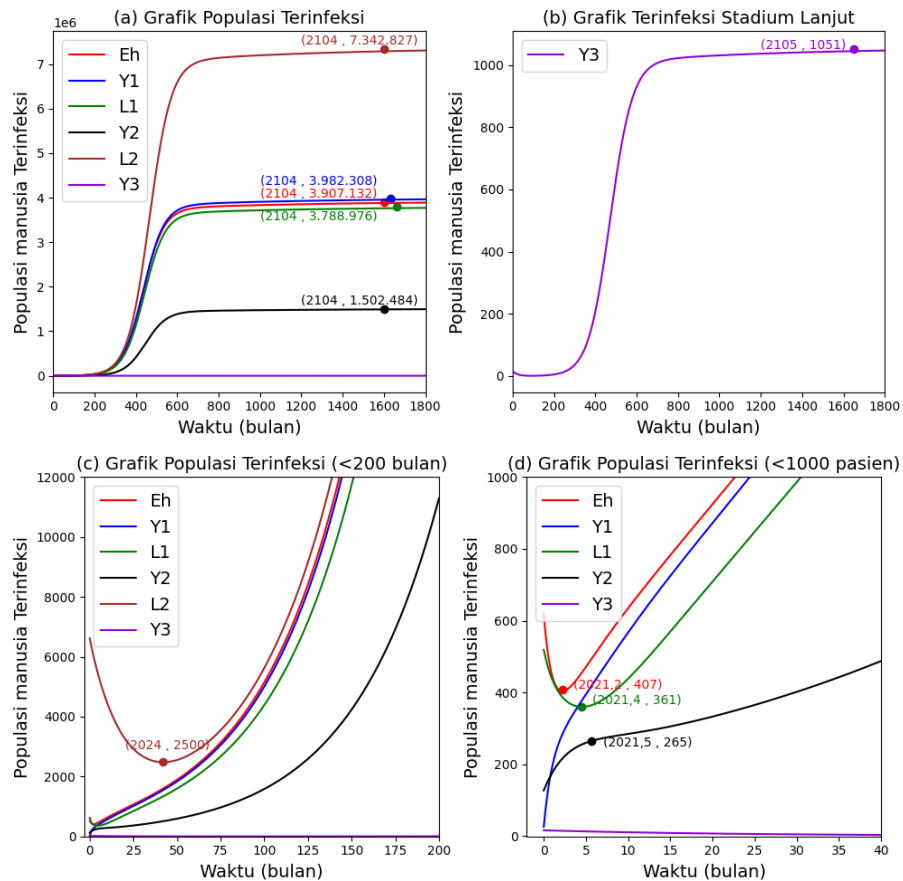
$$k_{E_h} = 0,9811225492, k_{Y_2} = 0,3772899265, k_{L_1} = 0,9514521942,$$

$$\begin{aligned}
 k_{Y_3} &= 0,0002641178576, k_{L_2} = 1,843862021, k_{S_h} = 0,576011196, \\
 k_{1B} &= 8,837167662 \times 10^{-9}, k_{2B} = 0,6525808104, k_{3B} = 6,029657358, \\
 k_{I_f} &= 5,721679220, k_{S_f} = 1.016160227 \times 10^{-16}, N_f = 237.290.666, \\
 N &= 250.063.200.
 \end{aligned}$$

Lebih lanjut, terhadap nilai awal kasus aktif pada tahun 2021 sejumlah 169 kasus dan 8027 kasus aktif pasif dengan jumlah kasus pada masing masing stadium adalah sebagai berikut: $E_h(0) = 619$, $Y_1(0) = 26$, $L_1(0) = 519$, $Y_2(0) = 127$, $L_2(0) = 6.619$, $Y_3(0) = 16$, dan nilai awal lainnya $S_h(0) = 226990000$, $S_f(0) = 226990000$, $N(0) = 227000000$, $N_f(0) = 227000000$, terdapat satu titik ekuilibrium endemik

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\hat{E}_h, \hat{Y}_1, \hat{L}_1, \hat{Y}_2, \hat{L}_2, \hat{Y}_3, \hat{I}_f, \hat{S}_h, \hat{S}_f \right)^T,$$

dengan $\hat{E}_h = 3.907.132$, $\hat{Y}_1 = 3.982.308$, $\hat{L}_1 = 3.788.976$, $\hat{Y}_2 = 1.502.484$, $\hat{L}_2 = 7.342.827$, $\hat{Y}_3 = 1051$, $\hat{I}_f = 20.789.235$, $\hat{S}_h = 229.538.418$, $\hat{S}_f = 216.501.431$, 1.



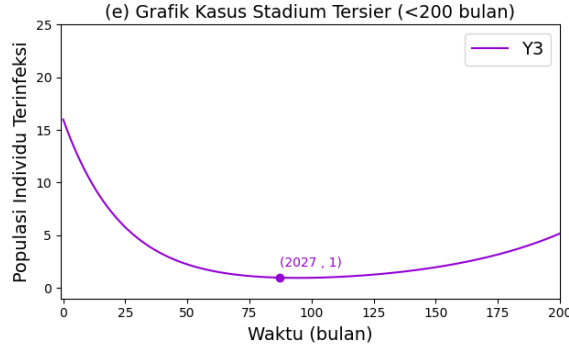


FIGURE 6. Simulasi Numerik untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ pada Kompartemen Manusia Terinfeksi terhadap Waktu

Berdasarkan nilai awal yang telah diberikan sebelumnya, yaitu pada tahun 2021 jumlah kasus $E_h(0) = 619$. Fluktuasi grafik dapat dilihat pada Gambar 6 bagian (a), jumlah kasus pada 200 bulan pertama tidak terlihat. Oleh sebab itu diperjelas pada bagian (c) dan (d). Pada Gambar 6 bagian (c), berdasarkan rate yang ditetapkan banyaknya individu terpapar (dalam masa inkubasi) mengalami penurunan pada 2 bulan pertama pada angka 407, kemudian dengan rate kontak yang ditetapkan apabila tidak dilakukan isolasi terhadap pasien penderita penyakit menular dapat mengakibatkan jumlah individu terpapar akan terus mengalami kenaikan hingga 200 bulan pertama. Berdasarkan gambar 6 bagian (a) kenaikan terus terjadi hingga stabil pada angka 3.907.132,671. Hal ini berarti jumlah individu terpapar akan tetap ada dan tidak akan menghilang.

Berdasarkan Persamaan (2.1), penambahan jumlah individu terinfeksi terpapar dapat berasal dari kontak dengan individu terinfeksi secara langsung (β), maupun kontak tak langsung melalui vektor lalat (ϕ). Oleh sebab itu, apabila pada pemeriksaan telah ditemui test RDT menyatakan positif frambusia, sebaiknya di kawasan tersebut dilakukan isolasi pada pasien sehingga meminimalisir kontak langsung, serta mengantisipasi segala vektor penyebab penularan secara tak langsung, seperti lalat. Hal ini dapat dilakukan dengan menjaga sanitasi, atau pemberantasan lalat disekitar agar laju kontak yang ada tidak menyebabkan penyakit terus bertambah hingga endemik. Pada kondisi ini jumlah kasus frambusia belum memenuhi target eradikasi, karena penyakit masih ada.

Disisi lain, berdasarkan Persamaan (2.1) rate pengobatan individu terpapar (τ_E) dan rate yang berkaitan dengan masa inkubasi bakteri (σ) berpengaruh pada pengurangan jumlah individu terpapar. Rate yang berkaitan dengan inkubasi tidak dapat dikendalikan, sedangkan rate pengobatan masih dapat dioptimalkan. Semakin besar rate pengobatan akan semakin sedikit jumlah individu terpapar. Bagi pihak-pihak yang berkepentingan, sebaiknya mengantisipasi proses isolasi agar laju kontak (langsung dan tidak langsung) tidak terlalu tinggi, dan memperhatikan pengobatan agar sampai kepada semua penderita sehingga target eradikasi dapat tercapai. Bagi individu

yang memiliki luka terbuka sebaiknya perlu diperhatikan pengobatan dan kebersihan lesi kulit serta barang-barang pribadi agar tidak bercampur dengan orang lain.

Berdasarkan nilai awal yang telah diberikan sebelumnya, yaitu pada tahun 2021 jumlah kasus $Y_1(0) = 26$. Fluktuasi grafik dapat dilihat pada Gambar 6 bagian (a). Meskipun demikian, jumlah kasus pada 200 bulan pertama tidak terlihat dengan jelas. Oleh sebab itu diperjelas pada bagian (c) dan (d). Berdasarkan gambar 6 bagian (d), Jumlah individu terinfeksi primer (Y_1) terus menerus naik hingga 20 bulan pertama. Pada bagian (c) juga terlihat bahwa jumlahnya terus menerus mengalami kenaikan hingga pada 200 bulan pertama. Lebih lanjut, pada bagian (a), kenaikan semakin pesat hingga stabil pada angka 3.982.308,504. Hal ini berarti penyakit akan tetap ada, khususnya penderita stadium primer akan tetap ada. Berdasarkan nilai awal yang telah diberikan sebelumnya, yaitu pada tahun 2021 jumlah kasus individu terinfeksi stadium laten 1 mula-mula 519 kasus, kemudian berdasarkan Gambar 6 bagian (d) turun hingga angka 361 yang kemudian akan naik secara terus menerus hingga stabil pada angka 3.788.976. Hal ini berarti kasus laten 1 akan tetap ada dan stadium ini dapat menjadi sumber penyakit frambusia dan berkembang ke stadium tingkat lanjut. Berdasarkan nilai awal yang telah ditetapkan sebelumnya, yaitu pada tahun 2021 dengan jumlah kasus 127 individu terinfeksi stadium sekunder akan mengalami kenaikan hingga 5 bulan pertama sampai pada angka 265 kasus. Lebih lanjut kenaikan tetap berlanjut namun tidak sepesat sebelumnya hingga stabil pada angka 1.502.484. Hal ini berarti penyakit akan tetap ada, khususnya penderita stadium sekunder akan tetap ada, dan sumber penyakit masih tetap ada dan penyakit tidak akan menghilang.

Jumlah individu stadium laten 2 yang mula-mula berada pada angka 6.619 mengalami penurunan di 42 bulan pertama hingga sampai pada angka 2500. Lebih lanjut jumlah individu stadium laten 2 mengalami kenaikan terus menerus hingga stabil pada angka 7.342.827. Akibatnya sumber penyakit laten 2 akan tetap ada dan penyakit masih tetap ada. Stadium tingkat lanjut (frambusia stadium tersier) ini yang mula-mula berada pada angka 16 kemudian turun hingga tersisa 1 kasus, kemudian kembali naik dan terus menerus naik hingga stabil pada angka 1051. Stadium tersier ini adalah stadium yang sangat ingin dihindari karena menyebabkan kecacatan, dan tidak berfungsi organ-organ tubuh dengan baik. Berdasarkan Persamaan (2.3-2.4) agar tidak mencapai stadium lanjut. Hal yang dapat dilakukan adalah mengontrol jumlah individu terinfeksi stadium sekunder dan laten 2. Proses pengontrolan Y_2 dan L_2 dapat dilakukan dengan pengobatan (τ_{Y_2} , dan τ_{L_2}). Sebaiknya di kawasan aktif frambusia pengobatan segera didistribusikan menyeluruh (massal) sehingga pengobatan dapat meminimalisir adanya kemungkinan individu memasuki stadium lanjut. Upaya yang dapat dilakukan adalah memantau keberlangsungan proses pengobatan rutin setiap enam bulan sekali, menghindari adanya inokulasi maupun penularan baik infeksi terhadap sakit yang diderita maupun tertular lagi. Selain itu diharapkan identifikasi penyakit dalam bentuk test RDT tersedia di setiap wilayah Indonesia agar penyakit dapat langsung diidentifikasi dan ditangani sehingga menghindari terjadinya pengendapan penyakit menahun, dan terlanjur menyebar ke tubuh. Upaya sanitasi dan lingkungan yang bersih juga dapat meminimalisir adanya kontak dengan lalat yang dapat menjadi vektor pembawa frambusia.

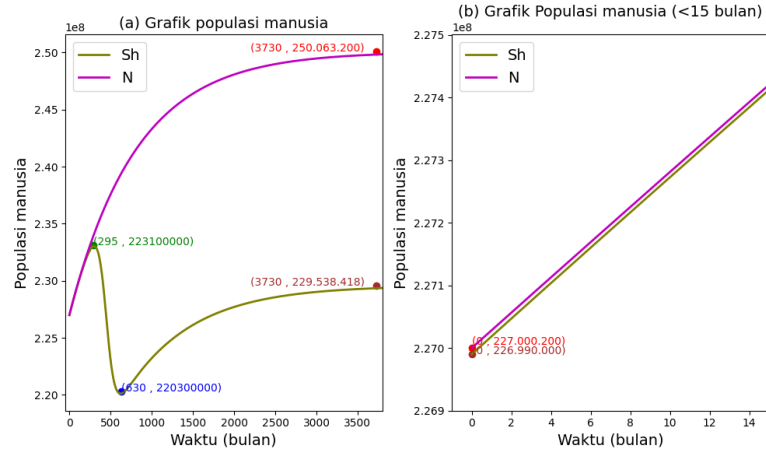


FIGURE 7. Simulasi Numerik untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ pada Populasi rentan (S_h) dan Populasi Total (N) terhadap Waktu

Pada Gambar (7), banyaknya individu rentan (S_h) akan terus menerus naik pada 295 bulan pertama, hingga mencapai puncaknya di bulan ke-295 pada angka $2,231 \times 10^8$ yang kemudian akan turun hingga mencapai titik minimumnya pada bulan ke 630 pada angka $2,203 \times 10^8$, yang kemudian akan kembali naik hingga stabil pada angka 229.538.418. Hal ini berarti dengan rate yang ditetapkan, apabila tidak terdapat perubahan maka jumlah individu rentan akan tetap ada. Jumlah populasi total terus mengalami kenaikan dan akan stabil pada angka 250.063.200, hal ini berarti populasi manusia di dunia akan tetap ada. Disisi lain, pada Gambar 7 bagian (a) terlihat kedua grafik seolah berhimpit, hal ini diperjelas pada bagian (b) bahwa grafik tidak berhimpit, namun memiliki selisih yang sangat sedikit.

Pada Gambar (8) bagian (a) terlihat fluktuasi grafik hingga di titik kestabilan endemiknya pada 1000 bulan. Meskipun demikian, tidak terlihat jelas pada 200 bulan pertama, yang kemudian diperjelas pada bagian (b), (c), dan (d). Pada Gambar 8 bagian (d), banyaknya lalat terinfeksi frambusia mengalami penurunan drastis pada minggu pertama. Setelah mengalami penurunan kemudian grafik akan naik dan terus naik pada 200 bulan pertama dan mencapai angka 20.789.235,64 ekor dan akan stabil di angka tersebut. Hal ini berarti lalat terinfeksi akan tetap ada, dan lalat akan tetap berperan sebagai vektor pembawa penyakit untuk kurun waktu yang lama.

Pada Gambar (9), bagian (a) grafik S_f dan N_f terlihat seolah-olah lurus, berhimpit dan stabil, namun diperjelas pada gambar bagian (b), (c) dan (d). Pada gambar (b) terlihat bahwa grafik mengalami kenaikan alih alih garis lurus. Pada gambar (c) terlihat kedua grafik akan stabil, dengan grafik S_f dan N_f masing-masing stabil pada angka 216.501.432,1 dan 237.290.666. Selain itu, meski grafik terlihat berhimpit, melalui Gambar 8 bagian (d) ditunjukkan bahwa kedua grafik tidak berhimpit dan memiliki selisih. Hal ini berarti populasi lalat rentan dan populasi total akan tetap ada. Serta terdapat populasi lalat terinfeksi dari selisih yang dihasilkan.

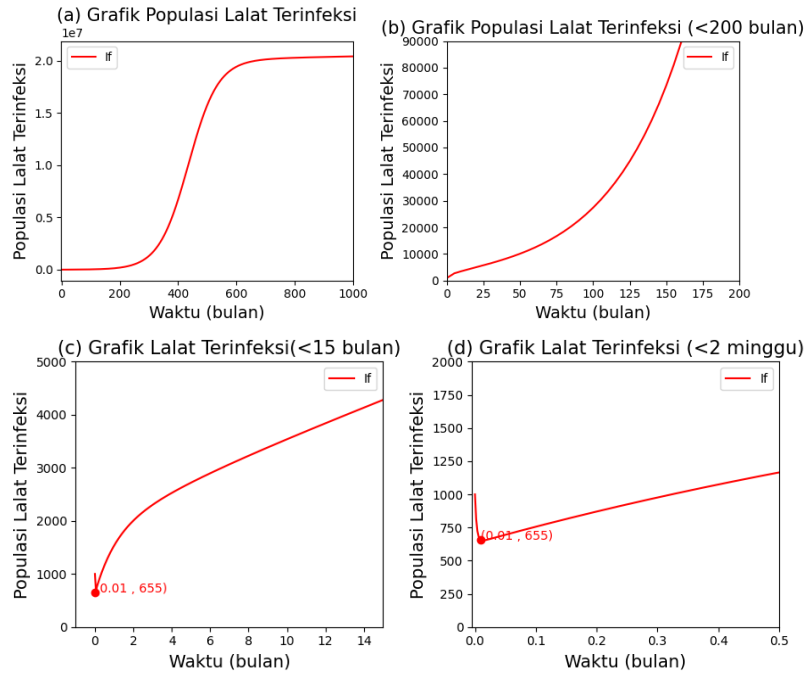


FIGURE 8. Simulasi Numerik untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ pada Lalat Terinfeksi (I_f) terhadap Waktu

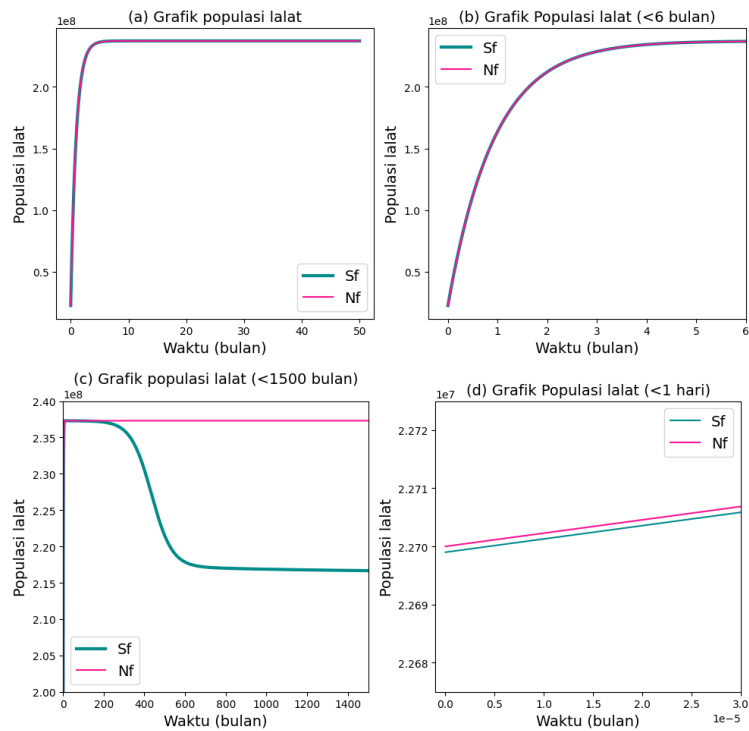


FIGURE 9. Simulasi Numerik untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ pada Kompartemen Lalat rentan (S_f) dan Total Lalat (N_f) terhadap Waktu

4. ANALISIS SENSITIVITAS PADA BILANGAN REPRODUKSI DASAR

Nilai sensitivitas untuk parameter β (dengan $\mathcal{R}_0 \neq 0$) adalah

$$\begin{aligned}
C_{\beta}^{\mathcal{R}_0} &= \frac{\beta}{\mathcal{R}_0} \times \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \beta} \\
&= \frac{\beta}{\mathcal{R}_0} \times \frac{\sigma}{2v_E v_{Y_1}} \left(1 - \frac{v_{L_2} \lambda_1}{v_{L_1}} r^*\right) + \frac{\beta}{\mathcal{R}_0} \times \frac{\frac{2\beta\sigma^2}{v_E^2 v_{Y_1}^2} (1+k_{Y_2})^2}{4\sqrt{\frac{\beta^2\sigma^2}{v_E^2 v_{Y_1}^2} (1+k_{Y_2})^2 + \frac{4\phi\sigma\varphi}{v_f v_E v_{Y_1}} (1+k_{Y_2})}} \\
&> 0
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Nilai sensitivitas untuk parameter σ (dengan $\mathcal{R}_0 \neq 0$) adalah

$$\begin{aligned}
C_{\sigma}^{\mathcal{R}_0} &= \frac{\sigma}{\mathcal{R}_0} \times \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \sigma} \\
&= \frac{\sigma}{\mathcal{R}_0} \times \left(\frac{1}{v_E} - \frac{\sigma}{v_E^2}\right) \frac{\beta}{2v_{Y_1}} \left(1 - \frac{v_{L_2} \lambda_1}{v_{L_1}} r^*\right) \\
&\quad + \frac{\sigma}{\mathcal{R}_0} \times \frac{\left(\frac{4\phi\varphi}{v_f v_{Y_1}}\right) \left(\frac{1}{v_E} - \frac{\sigma}{v_E^2}\right) (1+k_{Y_2}) + \left(\frac{2\sigma}{v_E^2} - \frac{2\sigma^2}{v_E^3}\right) \frac{\beta^2}{v_{Y_1}^2} (1+k_{Y_2})^2}{4\sqrt{\frac{\beta^2\sigma^2}{v_E^2 v_{Y_1}^2} (1+k_{Y_2})^2 + \frac{4\phi\sigma\varphi}{v_f v_E v_{Y_1}} (1+k_{Y_2})}} > 0
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Nilai sensitivitas untuk parameter λ_1 (dengan $\mathcal{R}_0 \neq 0$) adalah

$$\begin{aligned}
C_{\lambda_1}^{\mathcal{R}_0} &= \frac{\lambda_1}{\mathcal{R}_0} \times \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \lambda_1} \\
&= \frac{\lambda_1}{\mathcal{R}_0} \times \left(\frac{-1}{v_{Y_1}^2} - \frac{v_{L_2} r^*}{v_{L_1}} \left(\frac{1}{v_{Y_1}} - \frac{\lambda_1}{v_{Y_1}^2}\right)\right) \frac{\beta\sigma}{2v_E} \\
&\quad + \frac{\lambda_1}{\mathcal{R}_0} \times \frac{\left(\frac{-2}{v_{Y_1}^3} (1+k_{Y_2})^2 + 2(1+k_{Y_2})k_{Y_2}\right) \frac{\beta^2\sigma^2}{v_E^2}}{4\sqrt{\frac{\beta^2\sigma^2}{v_E^2 v_{Y_1}^2} (1+k_{Y_2})^2 + \frac{4\phi\sigma\varphi}{v_f v_E v_{Y_1}} (1+k_{Y_2})}} \\
&\quad + \frac{\lambda_1}{\mathcal{R}_0} \times \frac{\left(\frac{4\phi\sigma\varphi}{v_f v_E}\right) \left(\frac{-1}{v_{Y_1}^2} - \frac{v_{L_2} r^*}{v_{L_1}} \left(\frac{1}{v_{Y_1}} - \frac{\lambda_1}{v_{Y_1}^2}\right)\right)}{4\sqrt{\frac{\beta^2\sigma^2}{v_E^2 v_{Y_1}^2} (1+k_{Y_2})^2 + \frac{4\phi\sigma\varphi}{v_f v_E v_{Y_1}} (1+k_{Y_2})}} < 0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Diperhatikan bahwa $\mathcal{R}_0 = r_0 + \frac{1}{2}\sqrt{r_1^2 + r_2}$ dengan $r_2 = r_3 + r_4 = r_3 \times r_5$, $r_3 = \frac{4\phi\sigma\varphi}{v_f v_E v_{Y_1}}$, $r_4 = -\left(\frac{4\phi\sigma\varphi}{v_f v_E v_{Y_1}}\right) \left(\frac{v_{L_2} \lambda_1}{v_{L_1}} r^*\right) = r_3 k_{Y_2}$, dan $r_5 = \left(1 - \frac{v_{L_2} \lambda_1}{v_{L_1}} r^*\right) = 1 + k_{Y_2}$.

Pada $\mathcal{R}_0 \neq 0$, berlaku

$$\frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \tau_E} = -\frac{r_0}{v_E} + \frac{1}{4\sqrt{r_1^2 + r_2}} \left(\frac{-2r_1}{v_E} + \frac{-r_2}{v_E} \right) < 0. \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \tau_{Y_1}} = -\frac{r_0}{v_{Y_1}} + \frac{1}{4\sqrt{r_1^2 + r_2}} \left(\frac{-2r_1}{v_{Y_1}} + \frac{-r_2}{v_{Y_1}} \right) < 0. \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \tau_{Y_2}} = \frac{\beta \sigma}{2v_E v_{Y_1}} \left(\frac{-\lambda_1 v_{L_2}}{v_{L_1}} \right) \left(\frac{r_1^* (-v_{L_2})}{-(r_2^*)^2} \right) + \frac{1}{4\sqrt{r_1^2 + r_2}} \left(\frac{2r_1 \beta \sigma k_{Y_2} v_{L_2}}{v_E v_{Y_1} r_2^*} + \frac{r_4 v_{L_2}}{r_2^*} \right) < 0. \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \tau_{L_1}} &= \frac{\beta \sigma}{2v_E v_{Y_1}} \left(-\frac{\lambda_1 v_{L_2}}{r_2^*} \right) \left(\frac{-\rho_1 P_{Y_1 L_1}}{v_{L_1}^2} \right) + \frac{1}{4\sqrt{r_1^2 + r_2}} \left(\frac{2r_1 \beta \sigma \varsigma_5 v_{L_2} \rho_1}{v_E v_{Y_1} r_2^* v_{L_1}^2} + \frac{r_3 v_{L_2} \varsigma_5 \rho_1}{r_2^* v_{L_1}^2} \right) \\ &< 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \tau_{L_2}} &= \frac{\beta \sigma}{2v_E v_{Y_1}} \left(-\frac{\lambda_1 r_1^*}{v_{L_1}} \right) \left(\frac{\varsigma_2 \varsigma_6}{(r_2^*)^2} \right) + \frac{1}{4\sqrt{r_1^2 + r_2}} \left(\frac{2\beta^2 \sigma^2}{v_E^2 v_{Y_1}^2} r_5 \right) \left(-\frac{r_1^* \lambda_1}{v_{L_1}} \right) \left(\frac{\varsigma_2 \varsigma_6}{(r_2^*)^2} \right) \\ &+ \frac{1}{4\sqrt{r_1^2 + r_2}} \left(\frac{-r_3 \lambda_1 r_1^*}{v_{L_1}} \right) \left(\frac{\varsigma_2 \varsigma_6}{(r_2^*)^2} \right) < 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \zeta_f} = -\frac{1}{4\sqrt{r_1^2 + r_2}} \left(\frac{r_6 r_5}{\zeta_f + \mu_f} \right) < 0. \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \lambda_2} &= \frac{-\beta \sigma v_{L_2} \lambda_1 r_1^*}{2v_E v_{Y_1} v_{L_1}} \left(\frac{-P_{L_2 Y_2} \rho_2 P_{Y_2 L_2} + v_{L_2}}{(r_2^*)^2} \right) \\ &+ \frac{1}{4\sqrt{r_1^2 + r_2}} \left(\frac{2\beta^2 \sigma^2 r_5}{v_E^2 v_{Y_1}^2} + r_3 \right) k_{Y_2} \left(\frac{-\varsigma_2 P_{Y_2 L_2} + v_{L_2}}{r_2^*} \right) < 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \mu_f} = -\frac{\phi \varphi \sigma r_5}{v_f^2 v_E v_{Y_1} \sqrt{r_1^2 + r_2}} < 0 \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \rho_1} &= \frac{\beta \sigma v_{L_2}}{2v_E v_{Y_1} r_2^*} (-1) \left(\frac{1}{v_{L_1}} (\varsigma_5 + \varsigma_1) + \frac{-r_1^* \lambda_1}{v_{L_1}^2} \right) \\ &+ \frac{1}{4\sqrt{r_1^2 + r_2}} \left(\frac{2\beta^2 \sigma^2}{v_E^2 v_{Y_1}^2} r_5 \right) \left(-\frac{v_{L_2}}{r_2^*} \right) \left(\frac{\lambda_1}{v_{L_1}} - \frac{\rho_1 \varsigma_5 + v_{L_1} \varsigma_1}{v_{L_1}^2} \right) \\ &+ \frac{1}{4\sqrt{r_1^2 + r_2}} (r_3) \left(-\frac{v_{L_2} \lambda_1}{r_2^*} \right) \left(\frac{1}{v_{L_1}} - \frac{\rho_1 P_{Y_1 L_1} + v_{L_1} P_{Y_1 Y_2}}{v_{L_1}^2} \right) > 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \rho_2} &= \frac{\beta \sigma \lambda_1 r_1^*}{2v_E v_{Y_1} v_{L_1}} (-1) \left(\frac{1}{r_2^*} + \frac{v_{L_2} (P_{L_2 Y_2} P_{Y_2 L_2} \lambda_2 - v_{Y_2})}{(r_2^*)^2} \right) \\ &+ \frac{1}{4\sqrt{r_1^2 + r_2}} \left(\frac{2\beta^2 \sigma^2}{v_E^2 v_{Y_1}^2} r_5 \right) \left(-\frac{r_1^* \lambda_1}{v_{L_1}} \right) \left(\frac{1}{r_2^*} - \frac{v_{L_2} (P_{Y_2 L_2} \lambda_2 P_{L_2 Y_2}) - v_{Y_2}}{(r_2^*)^2} \right) \\ &+ \frac{1}{4\sqrt{r_1^2 + r_2}} (r_3) \left(-\frac{r_1^* \lambda_1}{v_{L_1}} \right) \left(\frac{1}{r_2^*} - \frac{v_{L_2} (P_{Y_2 L_2} \lambda_2 P_{L_2 Y_2}) - v_{Y_2}}{(r_2^*)^2} \right) > 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \phi} = \frac{\varphi \sigma r_5}{v_f v_E v_{Y_1} \sqrt{r_1^2 + r_2}} > 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \varphi} = \frac{\phi \sigma r_5}{v_f v_E v_{Y_1} \sqrt{r_1^2 + r_2}} > 0 \quad (4.15)$$

Diperhatikan bahwa $C_p^{\mathcal{R}_0}$ dengan $\mathcal{R}_0 > 0$ dan p mewakili parameter positif $\tau_E, \tau_{Y_1}, \tau_{Y_2}, \tau_{L_1}, \tau_{L_2}, \zeta_f, \lambda_1, \mu_f$. Berdasarkan Pertidaksamaan (4.4)-(4.11), berlaku $C_p^{\mathcal{R}_0} = \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial p} \times \frac{p}{\mathcal{R}_0} < 0$. Diperhatikan bahwa $C_p^{\mathcal{R}_0}$ dengan $\mathcal{R}_0 > 0$ dan p mewakili parameter positif $\rho_1, \rho_2, \phi, \varphi$. Berdasarkan Pertidaksamaan (4.12)-(4.15), berlaku $C_p^{\mathcal{R}_0} = \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial p} \times \frac{p}{\mathcal{R}_0} > 0$.

Berdasarkan Tabel 2, diperoleh nilai sensitivitas parameter berikut:

TABEL 3. Nilai Sensitivitas Parameter

Parameter	Sensitivity Value	Parameter	Sensitivity Value
β	0.8773269931	σ	0.0969571449211685
λ_1	-0.388413750782182	τ_E	-0.09623509284
τ_{Y_1}	-0.3698269799	τ_{Y_2}	-0.07249610727
τ_{L_1}	-0.08519380382	τ_{L_2}	-0.005946812096
ζ_f	-0.06115449630	λ_2	-0.1046079079
μ_f	-0.0001820074295	ρ_1	0.0858330129774759
ρ_2	0.00599143109350869	ϕ	0.06133650376
φ	0.06133650378		

Berdasarkan nilai sensitivitas di atas, dapat diamati pengaruh dari masing-masing parameter adalah sebagai berikut:

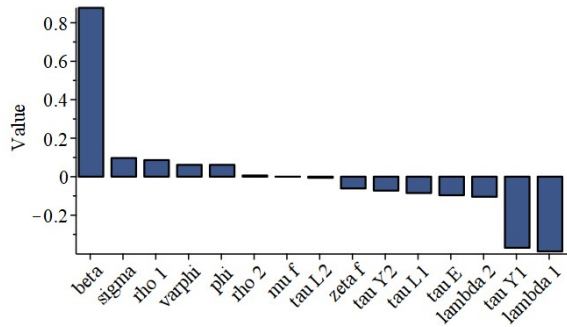


FIGURE 10. Perbandingan Sensitivitas Parametern

Berdasarkan perhitungan, diperoleh parameter yang berpengaruh terhadap penyebaran penyakit frambusia adalah $\beta, \sigma, \rho_1, \rho_2, \phi, \varphi$. Jika nilai parameter-parameter tersebut diperbesar, akan semakin besar pula nilai \mathcal{R}_0 yang dihasilkan. Sebaliknya, parameter-parameter yang berpengaruh pada proses eradikasi penyakit frambusia adalah $\lambda_1, \tau_E, \tau_{Y_1}, \tau_{Y_2}, \tau_{L_1}, \tau_{L_2}, \zeta_f, \lambda_2, \mu_f$. Jika parameter-parameter ini diperbesar, akan semakin kecil nilai \mathcal{R}_0 yang dihasilkan.

5. PENUTUP

Berdasarkan pembahasan pada bab-bab sebelumnya diperoleh bahwa penyebaran Model matematika penyebaran penyakit frambusia dengan adanya vektor lalat rentan dan terinfeksi yang dimodelkan dalam bentuk sistem persamaan differensial disajikan dalam persamaan (2.1)-(2.10). Selanjutnya dari sistem persamaan differensial tersebut dicari titik equilibrium bebas penyakit dan bilangan reproduksi dasar serta dilakukan analisis kestabilan menggunakan Jacobian dan R_0 . Hal ini dilakukan sebagai validasi dan pemeriksaan ketelitian serta syarat-syarat yang diperlukan bagi kondisi bebas penyakit maupun endemik. Lebih lanjut, R_0 digunakan untuk threshold simulasi numerik dan analisis sensitivitas.

Bilangan reproduksi dasar R_0 dalam model penyebaran penyakit frambusia dengan mempertimbangkan vektor lalat menggambarkan jumlah kasus baru yang diharapkan akan muncul dari satu kasus awal dalam populasi yang rentan. Nilai R_0 bergantung pada parameter-parameter yang terlibat dalam transmisi frambusia melalui vektor lalat, seperti tingkat kontak antara individu rentan dan infeksi, tingkat keberhasilan penularan lalat, dan faktor-faktor lain yang mempengaruhi penyebaran penyakit. Semakin tinggi R_0 , semakin mudah penyakit frambusia dapat menyebar dalam populasi, dan kontrol yang lebih ketat diperlukan untuk mencegah penyebaran yang luas.

Sifat kestabilan titik equilibrium bebas penyakit dan endemik dalam model ini akan bergantung pada nilai R_0 serta parameter-parameter lain dalam model. Titik equilibrium bebas penyakit stabil jika $R_0 < 1$, yang berarti bahwa penyakit frambusia tidak dapat menyebar secara luas dalam populasi. Sebaliknya, jika $R_0 > 1$, maka titik equilibrium endemik dapat terjadi, di mana penyakit frambusia akan terus ada dalam populasi.

Simulasi numerik model penyebaran penyakit frambusia dengan vektor lalat akan memperlihatkan bagaimana penyakit tersebut berkembang dalam populasi dari waktu ke waktu, berdasarkan parameter-parameter yang dimasukkan ke dalam model. Simulasi ini dapat memberikan gambaran tentang pola penyebaran penyakit, titik-titik kritis dalam penyebarannya, dan dampak dari variasi parameter terhadap dinamika penyakit.

Hasil yang diperoleh bahwa adanya vektor lalat mampu menyebabkan penyakit endemik apabila interaksi lalat dan manusia ada pada jumlah yang cukup. Berdasarkan skenario pada awal mula daerah belum mendapat perawatan pengobatan strategi morges, bersamaan dengan tingginya interaksi dengan vektor pembawa penyakit seperti lalat maka jumlah populasi akan menuju ke titik endemiknya.

Interpretasi model terhadap transmisi frambusia akan memberikan pemahaman tentang bagaimana faktor-faktor seperti kepadatan populasi, tingkat kontak, dan efektivitas pengendalian terhadap vektor (lalat) dapat memengaruhi penyebaran penyakit. Ini membantu dalam pengembangan strategi pencegahan dan pengendalian yang lebih efektif untuk meminimalkan dampak frambusia dalam populasi yang rentan.

References

- [1] Driessche P., dkk., Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental model of disease transmission, *Mathematical Biosciences* **180** (2002), 29-48.
- [2] Kazadi W.M., Asiedu K.B., Agana N., Mitj O., Epidemiology of yaws: an update, *Clinical Epidemiology* **6** (2014), 119-128.
- [3] Kimball dkk.,, An ODE model of yaws elimination in Lihir Island Papua New Guinea, *PeerJ* **10** (2022), 19-42.
- [4] Gischa, S., Apa itu penyakit menular?, *Kompas.com*, **2 Maret**, Kompas, Indonesia, 2020.
- [5] Lamborn W.A., The experimental transmission to *Treponema pertenu* by the fly *Musca sorbens* WD", *American Journal of Tropical Medicine and Hygiene* **39** 1936, 235-239.
- [6] Mitjà O., Asiedu K., Mabey D., Yaws, *The Lancet* **381** (2013), 763-773.
- [7] Perine P.L., Hopkins D.R., Niemel P.L., St John R., Causse G., Antal G., Handbook of endemic treponematoses: yaws, endemic syphilis and pinta, *World Health Organization*, WHO, Geneva, 1984.
- [8] Perko L., Differential Equations and Dynamical Systems Third Edition, *Springer*, New York, 2001.
- [9] Permenkes 8, Peraturan Pemerintah No. 8 Tahun 2017", *Permenkes*, Indonesia, 2017.
- [10] Plemmons, R.J., M-matrix characterizations.I - nonsingular M-matrices, *Linear Algebra and its Application* **18**(2) (1977), 175-188.
- [11] Satchell G.H., Harrison R.A., Experimental observations on the possibility of transmission of yaws by wound-feeding Diptera on western Samoa, *Trans. R. SOC. Tropical Medicine and Hygiene* **42** (2) 1953, 148-153.
- [12] Solomon A.W., Marks M., Martin D.L., Mikhailov A., Flueckiger R.M., Mitja O., Asiedu K., Jannin J., Engels D., Mabey D.C., Trachoma and yaws : common ground?, *PLOS Neglected Tropical Diseases* **9**(12), (2015), e0004071.
- [13] Stamm L.V., 110 years after Castellani's Discovery of *Treponema Pallidum* subspecies *pertenu*, *American Journal of Tropical Medicine and Hygiene* **93**(1) (2015), 4-6.
- [14] Stamm L.V., Flies and Yaws: Molecular Studies Provide New Insight, *eBioMedicine, Part of THE LANCET DiscoveryScience* **11** (2016), 9-10.
- [15] WHO, Infectious Disease, *WHO Regional Office for the East, Mediterranean*.
- [16] S. Wiggins, Introduction to Applied Nonlinear Dyn. Systems and Chaos., *Springer-Verlag*, New York, 1990.

FAIZAH AZZAHRA: Universitas Gadjah Mada.
E-mails: faizahazzahra@mail.ugm.ac.id

LINA ARYATI: Universitas Gadjah Mada.
linaaryati@ugm.ac.id