

Estimasi Rapat Spektral Daya Berbasis *Compressive Sampling*

Dyonisius Dony Ariananda¹

Abstract—This paper focus on spectrum sensing based on power spectral density (PSD) reconstruction from sub-Nyquist-rate samples. In the existing works on PSD reconstruction from sub-Nyquist-rate samples, the resulting system of linear equations (SLE) is generally overdetermined, which allows the PSD reconstruction using least-squares (LS). Note that there is a lower bound for the achievable sampling rate ensuring that the resulting SLE is overdetermined. This paper aims for a further sampling rate reduction, which results in an underdetermined SLE. However, when the resulting SLE is underdetermined, the LS method cannot be used to reconstruct PSD and additional constraints are required. Under this circumstance, a sparsity assumption (which is applicable for some applications) can be applied on the PSD. The use of the orthogonal matching pursuit (OMP) and the least absolute shrinkage and selection operator (LASSO) algorithms to reconstruct the PSD for the case of underdetermined SLE is examined. The simulation study shows that if an appropriate regularization parameter is used, the quality of the PSD reconstructed using LASSO is only slightly below the one produced using Nyquist-rate sampling. From the detection point of view, the PSD reconstructed using LASSO can accurately locate the occupied frequency band when the user signal power is sufficiently high compared to the noise power. Meanwhile, OMP can be used only in the noiseless scenario. These results indicate that the sampling rate alleviation up to a very low rate is possible while maintaining the quality of the spectrum sensing results at the acceptable level.

Intisari— Makalah ini membahas proses penginderaan spektrum berbasis rekonstruksi rapat spektral daya (*power spectral density*, PSD) dari sampel-sampel digital yang diperoleh dari pencuplikan dengan pesat di bawah pesat Nyquist. Pada literatur mengenai rekonstruksi PSD berbasis pencuplikan sub-Nyquist, sistem persamaan yang dihasilkan umumnya bersifat *overdetermined* sehingga algoritme *least-squares* (LS) dapat dipakai. Namun, perlu diingat bahwa ada batas minimal pesat pencuplikan yang harus dipenuhi untuk menjamin diperolehnya sistem *overdetermined* ini. Pada makalah ini, batas minimal pesat pencuplikan di atas dicoba dilewati meskipun sistem persamaan yang diperoleh akan bersifat *underdetermined* yang tidak memungkinkan digunakannya algoritme LS. Agar rekonstruksi PSD tetap dapat dilakukan pada kondisi ini, asumsi *sparsity* (yang valid untuk beberapa aplikasi) dapat dikenakan pada PSD yang akan direkonstruksi. Makalah ini mengevaluasi penggunaan algoritme *orthogonal matching pursuit* (OMP) dan *least absolute shrinkage and selection operator* (LASSO) untuk rekonstruksi PSD pada kasus sistem *underdetermined*. Hasil studi menunjukkan bahwa bila parameter regularisasi yang tepat digunakan, hasil rekonstruksi PSD dengan metode LASSO masih mendekati hasil rekonstruksi PSD yang diperoleh pada

pesat Nyquist. Hasil rekonstruksi PSD dengan metode LASSO juga dapat digunakan untuk mendeteksi lokasi pita frekuensi yang diduduki pengguna secara akurat saat daya isyarat pengguna relatif cukup tinggi terhadap daya derau. Sementara itu, OMP hanya dapat digunakan untuk kasus tanpa derau. Pada aplikasi yang membutuhkan proses rekonstruksi PSD, hasil ini mengindikasikan dimungkinkannya relaksasi pesat pencuplikan hingga pesat yang sangat rendah.

Kata Kunci— *Compressive sampling*, penginderaan spektrum, pencuplikan sub-Nyquist, rapat spektral daya, sistem *underdetermined*, *least absolute shrinkage and selection operator*.

I. PENDAHULUAN

Pesatnya perkembangan teknologi informasi dan telekomunikasi (terutama komunikasi nirkabel) terus diikuti dengan meningkatnya jumlah aplikasi yang memanfaatkan kedua teknologi tersebut. Hal ini didukung oleh semakin majunya teknologi pengolahan isyarat digital, yang memungkinkan terintegrasinya isyarat gambar, suara, maupun data, mendorong munculnya teknik penanganan galat yang lebih andal, serta meningkatkan kekebalan proses komunikasi terhadap keberadaan derau. Konversi isyarat analog ke isyarat digital dilakukan oleh perangkat *analog-to-digital converter* (ADC) yang melakukan proses pencuplikan terhadap isyarat analog (disusul dengan proses kuantisasi dan *encoding*). Menurut teorema pencuplikan Nyquist [1], suatu isyarat analog real yang memiliki lebar pita (*bandwidth*) yang terbatas (*bandlimited*) dapat direkonstruksi dari sampel-sampel digital hasil pencuplikan isyarat tersebut bila pesat pencuplikan (f_s) tidak lebih kecil dari dua kali nilai komponen frekuensi tertinggi pada isyarat tersebut (pesat Nyquist). Munculnya beberapa aplikasi yang memerlukan kapasitas dan lebar pita yang cukup besar, seperti aplikasi *ultrawideband*, telah menimbulkan permasalahan baru karena pencuplikan isyarat analog yang memiliki pita frekuensi cukup lebar membutuhkan f_s yang cukup tinggi pula. Hal ini dapat mengakibatkan tingginya konsumsi daya pada ADC [2].

Teori *Compressive Sampling* (CS) dapat membantu dalam menjawab permasalahan pencuplikan isyarat analog dengan pita frekuensi lebar (*wideband*) di atas [3]. Teori CS berargumen bahwa rekonstruksi isyarat analog dari sampel-sampel digital hasil pencuplikan dengan pesat di bawah pesat Nyquist cukup dimungkinkan, baik tanpa galat atau dengan galat yang minimal, bila isyarat analog yang asli memiliki sifat *sparse*. Suatu isyarat dikatakan memiliki sifat *sparse* jika saat isyarat tersebut direpresentasikan pada basis atau kawasan tertentu, hasil representasinya mengandung banyak elemen-elemen yang bernilai nol atau mendekati nol. Jika syarat di atas terpenuhi, berbagai algoritme rekonstruksi isyarat analog dari sampel-sampel digital hasil pencuplikan

¹ Dosen, Departemen Teknik Elektro dan Teknologi Informasi, Fakultas Teknik, Universitas Gadjah Mada, Jalan Grafika 2, Sleman, Daerah Istimewa Yogyakarta, Indonesia (telp: 0274-552 305; fax: 0274-547506; e-mail: dyonisius.dony@ugm.ac.id)

sub-Nyquist, seperti *orthogonal matching pursuit* (OMP) [4], *basis pursuit* [5], *least absolute shrinkage and selection operator* (LASSO) [6], dan *compressive sampling matching pursuit* [7], dapat digunakan.

Meskipun teori CS menawarkan kemampuan rekonstruksi isyarat terkait dengan pencuplikan isyarat analog pada aplikasi *wideband*, terdapat pula aplikasi-aplikasi *wideband* yang hanya memerlukan rekonstruksi besaran statistik seperti autokorelasi ataupun rapat spektral daya (*power spectral density*, PSD), alih-alih isyarat analog yang asli. Contoh aplikasi yang masuk dalam kategori ini adalah aplikasi penginderaan spektrum (*spectrum sensing*) pada teknologi radio kognitif (*cognitive radio*, CR) [8]. Teknologi CR merupakan teknologi yang memungkinkan pengguna-pengguna yang tidak memiliki lisensi pada pita frekuensi manapun (*secondary users*, SU) untuk meminjam dan menggunakan pita frekuensi milik pengguna berlisensi (*primary users*, PU) selama pita frekuensi tersebut tidak digunakan. Teknologi CR bertujuan untuk meningkatkan efisiensi penggunaan spektrum yang ketersediaannya semakin menipis berhubung jumlah aplikasi yang menggunakan komunikasi nirkabel semakin meningkat [9]. Untuk mengetahui pita frekuensi yang tidak diduduki oleh PU, SU perlu melakukan penginderaan pada pita frekuensi yang cukup lebar. Akibatnya, jika isyarat analog yang diterima melalui proses penginderaan harus diolah secara digital dalam rangka pengambilan keputusan, pesat pencuplikan yang harus dilakukan oleh perangkat ADC pada sisi SU akan cukup tinggi. Oleh karena itu, kebutuhan akan pencuplikan isyarat di bawah pesat Nyquist dirasa cukup relevan pada aplikasi ini. Akan tetapi, perlu dicatat bahwa pada aplikasi CR, rekonstruksi isyarat analog yang asli dari sampel-sampel digital yang dihasilkan tidak diperlukan. Hal ini karena SU hanya perlu mengidentifikasi pita frekuensi yang sedang maupun yang tidak sedang diduduki oleh PU dan informasi semacam ini dapat diperoleh dari PSD. Dengan demikian, pada sisi SU modul penginderaan spektrum dapat dibangun dengan berbasiskan pencuplikan isyarat pada pesat sub-Nyquist dan rekonstruksi PSD dari sampel-sampel yang dihasilkan oleh proses pencuplikan [10].

Berbagai metode rekonstruksi PSD dari sampel-sampel digital yang dihasilkan oleh proses pencuplikan sub-Nyquist telah diusulkan [10]-[13]. Pada umumnya, metode-metode tersebut melakukan estimasi terhadap nilai korelasi antara sampel-sampel hasil pencuplikan sub-Nyquist. Dengan berbasiskan pada hasil estimasi terhadap nilai korelasi-korelasi di atas, proses estimasi terhadap PSD isyarat analog yang diterima dilakukan. Hubungan antara PSD dengan nilai korelasi antara sampel-sampel hasil pencuplikan sub-Nyquist umumnya dapat dituliskan dalam sistem persamaan linear (SPL) yang berupa sistem *overdetermined* [10]. Akibatnya, proses rekonstruksi PSD dari nilai-nilai korelasi antar sampel digital dapat dilakukan tanpa harus mengasumsikan bahwa isyarat analog yang dicuplik oleh ADC memiliki sifat *sparse* pada basis atau kawasan mana pun. Dengan demikian, penggunaan algoritme-algoritme rekonstruksi isyarat [4]-[7] dari sampel-sampel hasil pencuplikan sub-Nyquist atau proses

CS dapat dihindari, dan sebagai gantinya, algoritme yang sederhana seperti *least-squares* (LS) dapat digunakan untuk rekonstruksi PSD.

Meskipun PSD sudah menyediakan informasi yang cukup untuk mendeteksi suatu pita frekuensi, sedang atau tidak sedang diduduki oleh PU, terdapat cukup banyak publikasi di bidang penginderaan spektrum untuk aplikasi CR yang tetap berkonsentrasi pada rekonstruksi isyarat atau spektrum (representasi isyarat pada kawasan frekuensi) dari sampel-sampel hasil proses CS dengan mengasumsikan bahwa spektrum yang dipantau memiliki sifat *sparse*. Motivasi yang digunakan oleh publikasi-publikasi tersebut adalah inefisiensi penggunaan spektrum yang melatarbelakangi munculnya konsep CR itu sendiri. Inefisiensi penggunaan spektrum dapat diterjemahkan sebagai banyaknya pita-pita frekuensi yang tidak terduduki (*spectrum holes*) pada tiap waktu tertentu yang berujung pada validnya asumsi bahwa spektrum yang dipantau memiliki sifat *sparse*. Lokasi dan jumlah *spectrum holes* ini dapat berubah dari waktu ke waktu (yang tidak lain merupakan justifikasi bagi perlunya aplikasi penginderaan spektrum itu sendiri). Salah satu publikasi yang menginisiasi pendekatan semacam ini adalah publikasi yang melakukan rekonstruksi spektrum dengan mengasumsikan bahwa representasi seluruh isyarat yang dimonitor memiliki sifat *sparse* di kawasan frekuensi [14]. Publikasi ini kemudian diikuti oleh publikasi lainnya yang mengembangkan teknik penginderaan spektrum untuk kasus beberapa sensor yang saling bekerja sama dengan tetap berbasiskan pada rekonstruksi spektrum [15]-[16]. Pengembangan teknik penginderaan spektrum yang berbasiskan pada CS, rekonstruksi spektrum, dan asumsi *sparsity* pada spektrum yang direkonstruksi terus bermunculan hingga saat ini [17]-[22].

Dari uraian mengenai dua kategori metode penginderaan spektrum di atas, dapat disimpulkan bahwa metode penginderaan spektrum yang berbasiskan pada rekonstruksi PSD belum mengeksplorasi validitas asumsi bahwa spektrum yang dipantau memiliki sifat *sparse*. Tidak dimanfaatkannya asumsi ini memang memungkinkan diperolehnya SPL yang bersifat *overdetermined*, yang memungkinkan digunakannya algoritme LS pada proses rekonstruksi PSD. Sebaliknya, metode-metode yang berbasiskan pada rekonstruksi isyarat telah memanfaatkan asumsi *sparsity* pada spektrum yang dipantau, tetapi mengabaikan fakta bahwa isyarat analog yang asli tidak perlu direkonstruksi pada sisi SU jika tujuan yang diinginkan adalah sekadar menemukan pita-pita frekuensi yang tidak diduduki oleh PU. Kedua kategori metode di atas sama-sama melakukan pencuplikan di bawah pesat Nyquist. Akan tetapi, batas minimal pesat pencuplikan isyarat analog yang dapat dilakukan pada kedua kategori di atas untuk mencapai kualitas penginderaan spektrum tertentu tidak akan serendah pesat pencuplikan yang dapat dicapai oleh suatu metode yang di satu sisi berfokus pada rekonstruksi PSD tetapi di sisi lain juga memanfaatkan asumsi *sparsity* pada spektrum yang dipantau. Berdasarkan uraian di atas, makalah ini mencoba untuk menyajikan teknik penginderaan spektrum yang berbasiskan pada rekonstruksi PSD tetapi sekaligus juga

memanfaatkan asumsi *sparsity* pada PSD, karena pada prinsipnya, baik PSD maupun spektrum suatu isyarat memiliki sifat *sparsity* yang sama (lokasi elemen-elemen PSD maupun elemen-elemen spektrum yang bernilai mendekati nol adalah sama).

II. PENCUPLIKAN SUB-NYQUIST DAN MODEL DATA

Makalah ini mengasumsikan keberadaan sebuah SU yang melakukan penginderaan spektrum pada pita frekuensi *wideband* dengan berbasiskan rekonstruksi PSD. Mengingat PSD hanya didefinisikan pada isyarat stationer [23], isyarat yang diterima oleh SU diasumsikan sebagai isyarat *wide-sense stationary* (WSS). Dengan demikian, rerata (*mean*) isyarat yang diterima adalah konstan dari waktu ke waktu dan nilai autokorelasi isyarat hanya bergantung pada tenggang atau selisih indeks waktu (*lag*) antar sampel. Isyarat analog yang diterima SU dicuplik pada pesat sub-Nyquist. Proses akuisisi sampel atau pencuplikan dapat dilakukan dengan metode-metode yang ada di literatur seperti pencuplikan *multi-coset* (*multi-coset sampling*) [24]-[25], *modulated wideband converter* [26], ataupun *random demodulation* [27]. Guna membatasi lingkup permasalahan, pencuplikan yang dibahas pada makalah ini adalah pencuplikan *multi-coset* meskipun metode yang dibahas sebenarnya juga dapat diterapkan pada jenis pencuplikan yang lain. Intuisi mengenai pencuplikan *multi-coset* dapat diperoleh dengan pertama-tama mempertimbangkan pencuplikan secara seragam (*uniform sampling*) pada pesat Nyquist, tetapi untuk setiap periode waktu yang merupakan kelipatan waktu cuplik pada *uniform sampling*, ada beberapa sampel digital pada indeks tertentu yang diabaikan. Indeks sampel digital yang diabaikan ini harus sama untuk setiap periode yang dimaksud. Dengan demikian, jumlah sampel yang diakuisisi pada pencuplikan *multi-coset* ini lebih sedikit daripada jumlah sampel yang diperoleh pada pencuplikan seragam dengan pesat Nyquist. Informasi detail mengenai pencuplikan *multi-coset* dapat ditemukan pada literatur yang tersedia [24]-[25].

Diasumsikan suatu isyarat analog WSS $s(t)$ yang diterima oleh sebuah SU. Andaikan $s(t)$ dicuplik pada pesat Nyquist $1/T$ dengan berbasiskan *uniform sampling*, maka pada selang waktu kNT , jumlah sampel digital yang dihasilkan oleh proses pencuplikan adalah kN buah, yang dapat dituliskan sebagai $s[0], s[1], \dots, s[kN-1]$. Tiap N sampel yang berurutan kemudian dapat disusun sebagai elemen-elemen vektor-vektor $\mathbf{s}[k]$, $k = 0, 1, 2, \dots, K-1$, yang masing-masing berukuran $N \times 1$, dengan $\mathbf{s}[k]$ diberikan oleh

$$\mathbf{s}[k] = [s[kN], s[kN+1], s[kN+2], \dots, s[kN+N-1]]^T, \quad (1)$$

dengan $[\cdot]^T$ mengindikasikan operasi *transpose* pada matriks atau vektor. Berlawanan dengan pengandaian di atas, makalah ini mengasumsikan bahwa isyarat $s(t)$ dicuplik pada pesat sub-Nyquist $M/(NT)$ ($M < N$) dengan menggunakan pencuplikan *multi-coset* [24], sehingga jumlah sampel digital yang dihasilkan untuk selang waktu kNT adalah kM buah. Pencuplik *multi-coset* ini dapat dimodelkan dengan M buah pencuplik seragam yang bekerja secara paralel, yang masing-masing memiliki pesat pencuplikan $1/(NT)$ [24]. Perlu dicatat bahwa M buah pencuplik seragam ini tidak melakukan proses pencuplikan pada waktu yang bersamaan. Tenggang waktu

pencuplikan antara pencuplik pertama dengan $M-1$ pencuplik yang lain diberikan oleh lT , dengan l adalah bilangan bulat antara 1 dan $N-1$ dan nilai l tidak sama untuk setiap dari $M-1$ pencuplik di atas. Jika K sampel yang berturut-turut pada pencuplik seragam ke- $(m+1)$ dituliskan sebagai $q_m[0], q_m[1], \dots, q_m[K-1]$, dengan $m = 0, 1, 2, \dots, M-1$, maka dapat didefinisikan K buah vektor $\mathbf{q}[k]$, $k = 0, 1, 2, \dots, K-1$, yang masing-masing berukuran $M \times 1$ dan yang dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{q}[k] = [q_0[k], q_1[k], q_2[k], \dots, q_{M-2}[k], q_{M-1}[k]]^T. \quad (2)$$

Berdasarkan uraian di atas serta literatur-literatur terkait [10], [24]-[25], proses pencuplikan *multi-coset* di atas secara matematis dapat pula dimodelkan sebagai perkalian antara sebuah matriks \mathbf{C} dengan vektor $\mathbf{s}[k]$ pada (1),

$$\mathbf{q}[k] = \mathbf{C} \mathbf{s}[k], \quad (3)$$

dengan $k = 0, 1, 2, \dots, K-1$, dan \mathbf{C} adalah matriks seleksi berukuran $M \times N$, yang seluruh M barisnya diperoleh dengan memilih M dari N baris pada matriks identitas \mathbf{I}_N yang berukuran $N \times N$. Perlu diketahui bahwa indeks M baris pada matriks \mathbf{I}_N yang dipakai untuk membentuk \mathbf{C} terkait dengan nilai l pada tenggang waktu pencuplikan antara pencuplik pertama pada pencuplik *multi-coset* dengan $M-1$ pencuplik yang lain (lT). Persamaan (3) juga mengindikasikan bahwa M/N adalah pesat kompresi relatif terhadap pesat pencuplikan Nyquist.

Jika \mathbf{R}_q adalah matriks autokorelasi atas $\mathbf{q}[k]$ yang berukuran $M \times M$, maka \mathbf{R}_q dapat dituliskan sebagai [10]

$$\mathbf{R}_q = E[\mathbf{q}[k]\mathbf{q}[k]^H] = \mathbf{C} \mathbf{R}_s \mathbf{C}^T, \quad (4)$$

dengan $\mathbf{R}_s = E[\mathbf{s}[k]\mathbf{s}[k]^H]$ adalah matriks autokorelasi atas $\mathbf{s}[k]$ yang berukuran $N \times N$ dan $(\cdot)^H$ mengindikasikan operasi *transpose* konjugat pada matriks atau vektor. Berhubung $s(t)$ adalah isyarat WSS, $\mathbf{s}[k]$ juga berisikan sampel-sampel digital WSS. Dengan demikian, \mathbf{R}_s merupakan matriks yang berbentuk Toeplitz dan hanya $2N-1$ dari N^2 elemen \mathbf{R}_s yang bernilai unik. Sebaliknya, karena \mathbf{C} adalah matriks seleksi, sampel-sampel pada $\mathbf{q}[k]$ umumnya tidak membentuk runtun sampel WSS dan \mathbf{R}_q pun tidak berbentuk Toeplitz. Proses berikutnya adalah vektorisasi \mathbf{R}_q ke dalam sebuah vektor $\text{vec}(\mathbf{R}_q)$ yang berukuran $M^2 \times 1$, dengan $\text{vec}(\cdot)$ adalah operator yang menumpuk kolom-kolom suatu matriks ke dalam sebuah vektor. Dengan demikian, $\text{vec}(\mathbf{R}_q)$ dapat ditulis sebagai [10]

$$\text{vec}(\mathbf{R}_q) = (\mathbf{C} \otimes \mathbf{C}) \text{vec}(\mathbf{R}_s), \quad (5)$$

dengan vektor $\text{vec}(\mathbf{R}_s)$ berukuran $N^2 \times 1$ dan \otimes adalah operasi *Kronecker product*. Berhubung \mathbf{R}_s hanya mengandung $2N-1$ elemen yang unik, elemen-elemen \mathbf{R}_s dapat dikondensasikan ke dalam vektor berukuran $(2N-1) \times 1$ yaitu $\mathbf{r}_s = [r_s[0], r_s[1], \dots, r_s[N-1], r_s[1-N], r_s[2-N], \dots, r_s[-1]]^T$, dengan $r_s[n^*] = E[s[n]s^*[n-n^*]]$ adalah nilai autokorelasi atas deret sampel digital $s[n]$ pada *lag* n^* dan $(\cdot)^*$ mengindikasikan operasi konjugat. Adapun relasi antara \mathbf{r}_s dengan \mathbf{R}_s dapat dituliskan sebagai [10]

$$\text{vec}(\mathbf{R}_s) = \mathbf{T} \mathbf{r}_s, \quad (6)$$

dengan \mathbf{T} adalah matriks perulangan berukuran $N^2 \times (2N-1)$ yang baris-barisnya diperoleh (sebagian dengan perulangan) dari baris-baris matriks identitas \mathbf{I}_{2N-1} berukuran $(2N-1) \times (2N-1)$. Detail formula untuk menyusun matriks \mathbf{T} dengan menggunakan baris-baris \mathbf{I}_{2N-1} dapat ditemukan pada referensi terkait [10]. Dengan menggunakan (6), $\text{vec}(\mathbf{R}_q)$ pada (5) dapat dituliskan sebagai

$$\text{vec}(\mathbf{R}_q) = (\mathbf{C} \otimes \mathbf{C}) \mathbf{Tr}_s = \Phi \mathbf{r}_s, \quad (7)$$

dengan matriks $\Phi = (\mathbf{C} \otimes \mathbf{C}) \mathbf{T}$ berukuran $M^2 \times (2N-1)$. Bergantung pada nilai M , SPL pada (7) dapat berupa sistem yang bersifat *overdetermined* maupun *underdetermined*, karena meskipun $M < N$, dapat diperoleh $M^2 > 2N-1$ ataupun $M^2 < 2N-1$. Untuk kasus $M^2 > 2N-1$, \mathbf{r}_s dapat direkonstruksi dari $\text{vec}(\mathbf{R}_q)$ jika Φ memiliki *full column rank*. Dengan mempertimbangkan bahwa elemen-elemen Φ seluruhnya merupakan bilangan real, pada situasi ini, rekonstruksi \mathbf{r}_s dapat dilakukan dengan menggunakan LS sebagai

$$\mathbf{r}_s = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \text{vec}(\mathbf{R}_q), \quad (8)$$

dengan $(\cdot)^{-1}$ mengindikasikan operasi invers. Konstruksi PSD dapat dilakukan dengan melakukan transformasi Fourier diskret (*discrete Fourier transform*, DFT) terhadap \mathbf{r}_s pada (8).

III. METODOLOGI

Tujuan penelitian yang dirangkum dalam makalah ini adalah mengevaluasi rekonstruksi PSD yang berbasis pada model (7) tetapi untuk kasus $M^2 < 2N-1$ (jumlah kolom Φ lebih besar daripada jumlah baris). Pada kasus ini rekonstruksi LS seperti (8) tidak dapat dilakukan karena SPL yang muncul pada (7) bersifat *underdetermined*. Oleh karena itu, asumsi *sparsity* dapat dikenakan pada PSD yang akan direkonstruksi. Pemodelan yang mengikutsertakan asumsi ini disajikan pada bagian IV.

Jenis metodologi yang dipakai adalah simulasi yang dilakukan dengan memanfaatkan dua buah algoritme rekonstruksi yang telah dipakai pada penelitian di bidang CS, yaitu OMP [4] dan *coordinate-descent* LASSO (CD-LASSO) [6]. Kedua algoritme tersebut disesuaikan dengan kasus rekonstruksi PSD yang dibahas pada makalah ini dan disajikan pada bagian IV. Untuk menyimulasikan isyarat pengirim yang diterima oleh SU, derau putih Gaussian (*additive white Gaussian noise*, AWGN) dilewatkan melalui proses penapisan. Untuk mendapatkan bentuk PSD yang dikehendaki, tanggapan frekuensi tapis disesuaikan dengan pita frekuensi yang diduduki oleh isyarat pengirim. Pengujian dilakukan pada skenario tanpa maupun dengan keberadaan derau AWGN serta difokuskan pada kasus deteksi karena pada aplikasi CR, kesempurnaan hasil estimasi PSD tidaklah begitu penting. Yang terpenting pada aplikasi ini adalah ketepatan SU dalam mendeteksi keberadaan PU pada suatu pita frekuensi. Informasi lebih detail mengenai hal ini dapat ditemukan pada bagian V.

IV. REKONSTRUKSI RAPAT SPEKTRAL DAYA BERBASISKAN ASUMSI SPARSITY

Sebagaimana dibahas pada bagian III, makalah ini mengevaluasi proses rekonstruksi PSD pada saat SPL pada (7)

berupa sistem *underdetermined* ($M^2 < 2N-1$). Dalam kondisi ini, untuk setiap nilai $\text{vec}(\mathbf{R}_q)$ pada (7) yang diketahui, ada tak terhingga solusi \mathbf{r}_s yang memenuhi (7). Pada situasi ini, validitas asumsi bahwa spektrum yang dipantau memiliki sifat *sparse* dapat dimanfaatkan (sebagaimana telah dibahas pada bagian I). Untuk itu, (7) dapat dituliskan sebagai

$$\text{vec}(\mathbf{R}_q) = \Phi \mathbf{r}_s = \Phi (\mathbf{F}_{2N-1})^{-1} \mathbf{p}_s = \Psi \mathbf{p}_s, \quad (9)$$

dengan $\Psi = \Phi (\mathbf{F}_{2N-1})^{-1}$ berukuran $M^2 \times (2N-1)$, \mathbf{F}_{2N-1} adalah matriks DFT berukuran $(2N-1) \times (2N-1)$, dan vektor berukuran $(2N-1) \times 1$ \mathbf{p}_s berisikan PSD sampel-sampel digital $s[n]$. Bila asumsi *sparsity* dikenakan pada \mathbf{p}_s , maka solusi bagi \mathbf{p}_s yang memenuhi (9) dapat diperoleh dari proses optimasi berikut

$$\arg \min_{\mathbf{p}_s} \|\mathbf{p}_s\|_0 \quad \text{subject to (s.t.) } \text{vec}(\mathbf{R}_q) = \Psi \mathbf{p}_s, \quad (10)$$

dengan $\|\cdot\|_0$ mengindikasikan *norm- l_0* yang keluarannya berupa jumlah elemen yang tidak nol pada vektor yang dikenakan operasi *norm- l_0* , sedangkan pernyataan yang ada di sebelah kanan notasi (s.t.) adalah batasan (*constraint*) yang harus dipenuhi pada proses optimasi. Dengan demikian, (10) akan memberikan solusi \mathbf{p}_s yang memenuhi (9) dan yang memiliki tingkat *sparsity* paling tinggi (jumlah elemen bernilai nol paling banyak) dibandingkan solusi lainnya yang juga memenuhi (9). Proses optimasi pada (10) cukup rumit untuk diselesaikan karena fungsi tujuan pada proses optimasi (10) bukanlah fungsi yang bersifat *convex*. Di samping itu, tingkat keberhasilan proses optimasi pada (10) juga sangat bergantung pada kondisi atau struktur matriks Ψ yang diukur dengan menggunakan besaran *rank* Kruskal dan *mutual coherence* yang dijelaskan pada literatur terkait [28], [29].

Dengan mempertimbangkan bahwa $\Phi = (\mathbf{C} \otimes \mathbf{C}) \mathbf{T}$, cukup jelas bahwa pemilihan matriks seleksi \mathbf{C} untuk nilai M tertentu akan menentukan kondisi matriks Ψ yang dikonstruksi. Salah satu cara yang dapat dilakukan untuk mengurangi kerumitan pada problem optimasi (10) adalah dengan melakukan pendekatan terhadap problem optimasi (10). Hal ini dilakukan dengan mengganti *norm- l_0* pada fungsi tujuan dengan *norm- l_1* [28], [30], sehingga diperoleh

$$\arg \min_{\mathbf{p}_s} \|\mathbf{p}_s\|_1 \quad \text{s.t. } \text{vec}(\mathbf{R}_q) = \Psi \mathbf{p}_s, \quad (11)$$

dengan $\|\cdot\|_1$ mengindikasikan *norm- l_1* yang keluarannya berupa total nilai absolut atas seluruh elemen-elemen vektor yang dikenakan operasi *norm- l_1* . Dengan demikian, (11) akan memberikan solusi \mathbf{p}_s yang memenuhi (9) dan yang memiliki total nilai absolut paling kecil dibandingkan solusi lainnya yang juga memenuhi (9). Meskipun *norm- l_0* dan *norm- l_1* berbeda, dalam literatur terkait yang membahas tentang teori CS [28]-[30], dijelaskan bahwa pada saat suatu vektor \mathbf{x} yang akan direkonstruksi memiliki sifat *sparse*, maka dengan peluang yang cukup tinggi, proses minimalisasi terhadap $\|\mathbf{x}\|_1$ akan memberikan solusi \mathbf{x} yang diinginkan layaknya jika dilakukan minimalisasi terhadap $\|\mathbf{x}\|_0$. Hal ini tentu memberikan keuntungan karena *norm- l_1* bersifat *convex* yang berarti problem optimasi pada (11) secara komputasi akan lebih praktis untuk diselesaikan daripada problem (10). Sebagaimana pada (10), tingkat keberhasilan proses optimasi (11) juga sangat dipengaruhi kondisi matriks Ψ yang diukur dengan menggunakan besaran *mutual coherence* [28], [29].

Formulasi di atas merupakan formulasi pada kondisi ideal. Pada prakteknya, ada dua hal penting yang perlu mendapat perhatian. Hal pertama adalah perlunya dilakukan pendekatan terhadap operasi *expectancy* $E[.]$ yang digunakan untuk menghitung matriks autokorelasi \mathbf{R}_q pada (4). Meskipun deret yang disusun oleh elemen-elemen $\mathbf{q}[k]$ tidak membentuk suatu deret WSS, dapat ditemukan bahwa deret vektor yang disusun oleh $\mathbf{q}[k]$, untuk $k = 0, 1, 2, \dots$ adalah deret vektor WSS. Dengan demikian, perhitungan \mathbf{R}_q pada (4) dapat didekati dengan

$$\hat{\mathbf{R}}_q = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{q}[k] \mathbf{q}[k]^H. \quad (12)$$

Akibatnya, proses optimasi (10) dan (11) harus berturut-turut didefinisikan ulang sebagai

$$\arg \min_{\hat{\mathbf{p}}_s} \|\hat{\mathbf{p}}_s\|_0 \text{ s.t. } \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_q) = \Psi \hat{\mathbf{p}}_s, \quad (13)$$

$$\arg \min_{\hat{\mathbf{p}}_s} \|\hat{\mathbf{p}}_s\|_1 \text{ s.t. } \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_q) = \Psi \hat{\mathbf{p}}_s. \quad (14)$$

Hal yang kedua adalah keberadaan derau pada $\mathbf{q}[k]$, yang berarti, alih-alih (3), $\mathbf{q}[k]$ diberikan oleh $\mathbf{q}[k] = \mathbf{C}\mathbf{s}[k] + \mathbf{m}[k]$, dengan $\mathbf{m}[k]$ adalah vektor berukuran $M \times 1$ yang elemen-elemennya berupa derau AWGN. Jika nilai variansi tiap-tiap elemen pada $\mathbf{m}[k]$ diberikan oleh σ_m^2 dan tidak ada korelasi antara $\mathbf{m}[k]$ dan $\mathbf{s}[k]$, maka alih-alih (5) dan (7), \mathbf{R}_q dapat dituliskan sebagai

$$\text{vec}(\mathbf{R}_q) = (\mathbf{C} \otimes \mathbf{C}) \text{Tr}_s + \sigma_m^2 \text{vec}(\mathbf{I}_M). \quad (15)$$

Tampak bahwa suku kedua pada ruas kanan (15) merupakan besaran yang tidak acak (*deterministic*) sehingga bila daya derau σ_m^2 diketahui, suku kedua pada (15) dapat dikurangkan dari nilai yang ada di ruas kiri. Akan tetapi, perlu diingat bahwa alih-alih \mathbf{R}_q , besaran yang dapat diperoleh oleh SU adalah $\hat{\mathbf{R}}_q$ pada (12), yang dapat dijabarkan sebagai

$$\text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_q) = (\mathbf{C} \otimes \mathbf{C}) \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_s) + \hat{\mathbf{v}}_m, \quad (16)$$

dengan $\hat{\mathbf{R}}_s$ adalah pendekatan bagi \mathbf{R}_s pada (4) yang diberikan oleh $\hat{\mathbf{R}}_s = (\sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{s}[k] \mathbf{s}[k]^H) / K$, dan $\hat{\mathbf{v}}_m$ diberikan oleh

$$\hat{\mathbf{v}}_m = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} (\mathbf{C}\mathbf{s}[k] \mathbf{m}[k]^H + \mathbf{m}[k] \mathbf{s}[k]^H \mathbf{C}^H) + \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{m}[k] \mathbf{m}[k]^H. \quad (17)$$

Pada (16)-(17), tampak bahwa kontribusi derau pada $\hat{\mathbf{R}}_q$ tidak berupa besaran yang bersifat *deterministic* seperti pada \mathbf{R}_q , melainkan berupa besaran yang bernilai acak. Saat sampel-sampel yang diperoleh pada $\mathbf{q}[k]$ terkontaminasi oleh derau dengan spesifikasi di atas, proses rekonstruksi PSD dapat dilakukan dengan formulasi yang dalam teori CS dikenal dengan *sparsity-regularized* LS [29]. Proses rekonstruksi PSD dengan formulasi ini dapat ditulis sebagai

$$\arg \min_{\hat{\mathbf{p}}_s} \|\text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_q) - \Psi \hat{\mathbf{p}}_s\|_2^2 + \lambda \|\hat{\mathbf{p}}_s\|_1, \quad (18)$$

dengan $\|\mathbf{x}\|_2$ mengindikasikan norm- l_2 atas \mathbf{x} yang keluarannya berupa panjang vektor \mathbf{x} , sedangkan λ adalah parameter regularisasi yang nilainya mengindikasikan kompromi (*trade-off*) antara usaha untuk mendapatkan $\hat{\mathbf{p}}_s$ yang memiliki sifat *sparse* dengan usaha untuk meminimalkan panjang vektor

galat $\text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_q) - \Psi \hat{\mathbf{p}}_s$. Pada prinsipnya, jika λ terlalu besar, nilai galat $\text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_q) - \Psi \hat{\mathbf{p}}_s$ cenderung praktis akan diabaikan dan seluruh elemen $\hat{\mathbf{p}}_s$ yang dihasilkan akan bernilai nol. Tampak bahwa keberadaan vektor galat $\text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_q) - \Psi \hat{\mathbf{p}}_s$ pada problem optimasi (18) mengakomodasi keberadaan $\hat{\mathbf{v}}_m$ pada (16) yang muncul akibat keberadaan derau. Di samping itu, vektor galat ini juga mengakomodasi galat yang muncul akibat ketidaksesuaian antara fakta bahwa $\hat{\mathbf{R}}_s$ umumnya tidak benar-benar memiliki struktur Toeplitz layaknya \mathbf{R}_s dengan proses rekonstruksi $\hat{\mathbf{p}}_s$ pada (18) yang secara tidak langsung mengasumsikan bahwa $\hat{\mathbf{p}}_s = \mathbf{F}_{2N-1} \hat{\mathbf{r}}_s$ dengan $\text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_s) = \mathbf{T} \hat{\mathbf{r}}_s$ (yang artinya rekonstruksi ini mengasumsikan bahwa $\hat{\mathbf{R}}_s$ memiliki struktur Toeplitz). Kondisi yang harus dipenuhi pada matriks Ψ agar stabilitas proses optimasi (18) dapat dicapai sehingga menghasilkan solusi yang akurasi dapat diterima adalah kondisi yang dikenal dengan *restricted isometry property* [28]-[30].

TABEL I

ALGORITME *ORTHOGONAL MATCHING PURSUIT* [4] YANG TELAH DISESUAIKAN UNTUK PROSES REKONSTRUKSI PSD BERBASISKAN PADA (13)

Masukan: Matriks Ψ (ukuran $M^2 \times (2N-1)$), matriks $\hat{\mathbf{R}}_q$ (ukuran $M \times M$), tingkat sparsity μ pada \mathbf{p}_s yang akan direkonstruksi
Keluaran: Hasil estimasi PSD $\hat{\mathbf{p}}_s$
Notasi penting: i : pencacah iterasi. Γ_i : himpunan pada iterasi ke- i yang elemen-elemennya berupa i buah elemen yang merupakan anggota himpunan $\{0, 1, 2, 3, \dots, 2N-2\}$. \mathbf{a}_i : vektor berukuran $M^2 \times 1$ yang merupakan pendekatan bagi $\text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_q)$ pada akhir iterasi ke- i . \mathbf{b}_i : vektor residu berukuran $M^2 \times 1$ yang diberikan oleh $\mathbf{b}_i = \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_q) - \mathbf{a}_i$.
Prosedur: 1. Proses inisialisasi: Cacah iterasi i diset pada $i = 1$, vektor residu \mathbf{b}_0 diset dengan $\mathbf{b}_0 = \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_q)$, dan himpunan Γ_0 diset dengan $\Gamma_0 = \{ \}$. 2. Temukan indeks γ_i yang merupakan solusi bagi problem optimasi berikut: $\gamma_i = \arg \max_{j=0,1,\dots,2N-2} \mathbf{b}_{i-1}^H \boldsymbol{\varphi}_j $ Jika nilai maksimum ditemukan untuk lebih dari satu indeks maka salah satu indeks dapat dipilih sebagai γ_i . 3. Dengan mendefinisikan Ψ_0 sebagai matriks kosong (tidak memiliki elemen), maka dilakukan operasi penggabungan himpunan $\Gamma_i = \Gamma_{i-1} \cup \{ \gamma_i \}$ dan operasi augmentasi matriks $\Psi_i = [\Psi_{i-1} \ \boldsymbol{\varphi}_{\gamma_i}]$. 4. Temukan solusi bagi permasalahan LS berikut: $\mathbf{y}_i = \arg \min_{\mathbf{y}} \ \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_q) - \Psi_i \mathbf{y}\ _2$ Nilai \mathbf{y}_i akan diberikan oleh: $\mathbf{y}_i = (\Psi_i^H \Psi_i)^{-1} \Psi_i^H \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_q)$ 5. Tentukan nilai pendekatan bagi $\text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_q)$ pada iterasi ke- i beserta nilai residu yang dihasilkan: $\mathbf{a}_i = \Psi_i \mathbf{y}_i$ $\mathbf{b}_i = \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_q) - \mathbf{a}_i$ 6. Tingkatkan pencacah iterasi i sebesar 1 dan kembali ke langkah 2 selama $i < \mu$. 7. Lokasi atau indeks elemen-elemen hasil estimasi PSD $\hat{\mathbf{p}}_s$ yang bernilai tidak nol akan diindikasikan oleh elemen-elemen Γ_μ sedangkan nilai elemen-elemen $\hat{\mathbf{p}}_s$ pada indeks γ_i akan diberikan oleh elemen ke- $(i+1)$ pada vektor \mathbf{y}_μ .

TABEL II

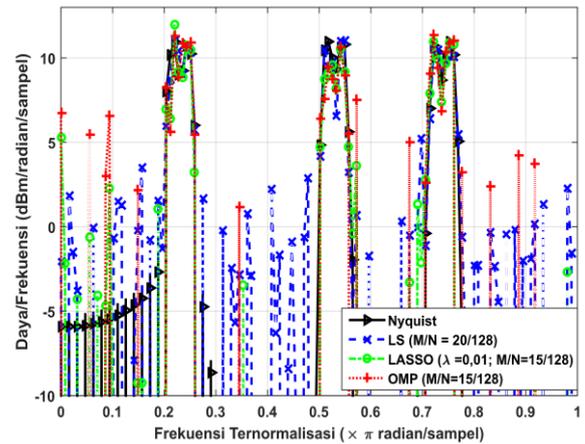
ALGORITME *COORDINATE-DESCENT* LASSO [6] YANG TELAH DISESUAIKAN UNTUK PROSES REKONSTRUKSI PSD BERBASISKAN PADA (18)

<p>Masukan: Matriks Ψ (ukuran $M^2 \times (2N-1)$), matriks $\hat{\mathbf{R}}_q$ (ukuran $M \times M$), parameter regularisasi λ, batas maksimum iterasi kalang utama yang diinginkan (i_{\max}), nilai ambang (<i>threshold</i>) ε yang dapat dipakai untuk mengakhiri proses iterasi sebelum i_{\max} tercapai.</p>
<p>Keluaran: Hasil estimasi PSD $\hat{\mathbf{p}}_s$</p>
<p>Notasi penting: i : pencacah iterasi untuk kalang utama. j : pencacah iterasi untuk kalang dalam. \mathbf{y} : Vektor berukuran $(2N-1) \times 1$ yang didefinisikan sebagai $\mathbf{y} = [y[0], y[1], y[2], \dots, y[2N-2]]^T$ digunakan untuk menyimpan hasil estimasi PSD sementara. \mathbf{y}_0 : Vektor berukuran $(2N-1) \times 1$ yang juga digunakan untuk menyimpan hasil estimasi PSD sementara. Variabel bantu: $\boldsymbol{\alpha}$ (vektor berukuran $(2N-1) \times 1$) dan β (skalar).</p>
<p>Prosedur: 1. Proses inialisasi: i diset $i = 1$, vektor \mathbf{y} diset $\mathbf{y}=\mathbf{0}$. 2. \mathbf{y}_0 diset dengan $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}$. 3. Set j dengan $j = 0$. 4. Set $\boldsymbol{\alpha} = \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_q) - \Psi \mathbf{y} + \boldsymbol{\varphi}_j y[j]$. 5. Set $\beta = 1 - (\lambda/2) / \ \boldsymbol{\varphi}_j^H \boldsymbol{\alpha}\$. 6. Set $y[j] = \left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_j^H \boldsymbol{\alpha}}{\ \boldsymbol{\varphi}_j\ _2^2} \right) (\max(\beta, 0))$. 7. Jika $j < 2N-2$ maka nilai j ditingkatkan sebesar 1 dan proses kembali ke langkah 4. 8. Jika $i < i_{\max}$ atau $\ \mathbf{y} - \mathbf{y}_0\ > \varepsilon$ maka nilai i ditingkatkan sebesar 1 dan proses kembali ke langkah 2. 9. Nilai $\hat{\mathbf{p}}_s$ diset dengan $\hat{\mathbf{p}}_s = \mathbf{y}$.</p>

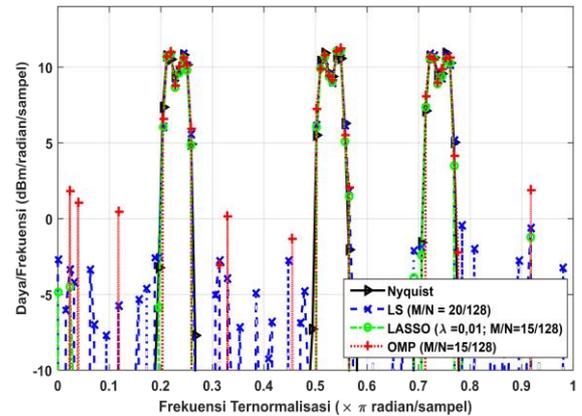
Fokus makalah ini adalah pada problem rekonstruksi PSD yang berbasiskan pada (13) dan (18) untuk kasus tanpa derau ($\mathbf{q}[k]=\mathbf{C}\mathbf{s}[k]$) serta problem rekonstruksi PSD yang berbasiskan pada (18) untuk kasus dengan derau ($\mathbf{q}[k]=\mathbf{C}\mathbf{s}[k]+\mathbf{m}[k]$). Untuk kasus tanpa derau, proses rekonstruksi PSD yang berbasiskan pada (13) akan dilakukan dengan menggunakan algoritme OMP [4] yang memang berfokus pada minimalisasi norm- l_0 . Detail mengenai algoritme OMP [4] yang telah disesuaikan dengan problem optimasi (13) dapat dilihat pada Tabel I. Untuk keperluan Tabel I dan Tabel II, Ψ beserta kolom-kolomnya dapat dituliskan sebagai $\Psi = [\boldsymbol{\varphi}_0 \ \boldsymbol{\varphi}_1 \ \dots \ \boldsymbol{\varphi}_{2N-2}]$, dengan $\boldsymbol{\varphi}_n$ adalah kolom ke- $(n+1)$ pada matriks Ψ . Untuk proses rekonstruksi PSD yang berbasiskan pada (18), baik untuk kasus dengan maupun tanpa derau, algoritme CD-LASSO [6] akan digunakan. Detail mengenai algoritme CD-LASSO [6] yang telah disesuaikan dengan problem optimasi (18) diperlihatkan pada Tabel II.

V. HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini membahas detail simulasi yang dilakukan untuk mengevaluasi rekonstruksi PSD pada bagian IV. Pada simulasi bagian pertama dan kedua, isyarat WSS yang diterima oleh SU diasumsikan menduduki pita frekuensi (dalam frekuensi digital) $[0,2\pi \ 0,26\pi]$, $[0,5\pi \ 0,56\pi]$, dan $[0,71\pi \ 0,77\pi]$ dengan isyarat yang diterima diasumsikan memiliki nilai PSD sebesar 10dBm/radian/sampel pada pita frekuensi yang diduduki. Nilai pita frekuensi di atas dipilih guna menyimulasikan asumsi bahwa spektrum yang dipantau memiliki sifat *sparse* karena hanya 18% dari seluruh pita



(a)

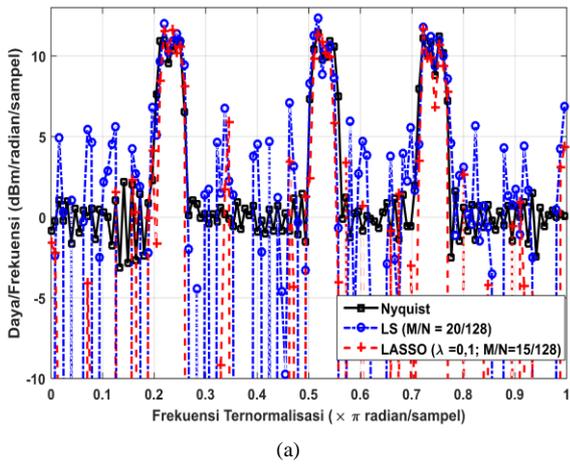


(b)

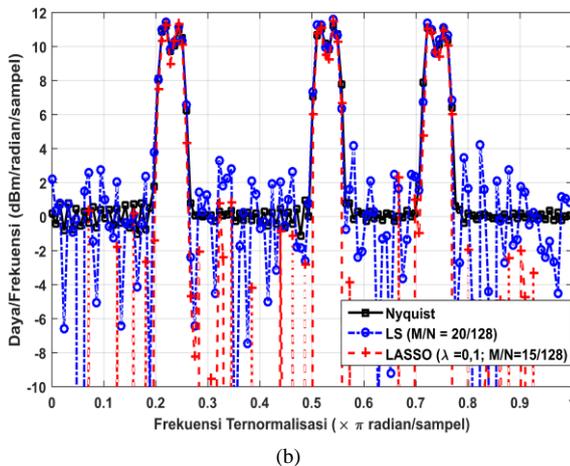
Gbr. 1 Hasil rekonstruksi PSD dengan metode LS, CD-LASSO, dan OMP pada simulasi bagian pertama untuk kasus tanpa derau dengan (a) $K=391$ vektor sampel dan (b) $K=3906$ vektor sampel. Hasil rekonstruksi PSD yang berbasiskan pada sampel-sampel hasil pencuplikan Nyquist ditampilkan sebagai referensi.

frekuensi digital yang tersedia ($[0, \pi]$) yang diduduki. Isyarat tersebut dibangkitkan dengan melewati AWGN dengan daya 10dBm melalui sebuah tapis dengan tanggapan denyet terbatas (*finite impulse response*) yang tanggapan frekuensinya diatur sedemikian rupa sehingga *passband* tapis tersebut berada pada pita frekuensi yang dirancang untuk diduduki oleh isyarat di atas. Jumlah denyet pada tapis tersebut diset sama dengan $N=128$ yang artinya nilai autokorelasi isyarat $r_s[n]$ akan bernilai $r_s[n]=0$ untuk $n > 127$. Jika hal ini dikaitkan dengan elemen-elemen \mathbf{r}_s pada (6) maka jelas bahwa tahapan simulasi ini bertujuan untuk merekonstruksi fungsi autokorelasi pada seluruh *lag* yang nilai korelasinya tidak nol. Dengan demikian, bila ada galat dalam rekonstruksi PSD, dapat dipastikan bahwa galat tersebut bukan berasal dari efek *truncation* terhadap fungsi autokorelasi. SU di atas diasumsikan menggunakan pencuplikan *multi-coset* dengan nilai $N=128$. Oleh karena itu, andaikan pencuplikan dilakukan oleh SU pada pesat Nyquist, jumlah sampel digital yang diperoleh adalah $128K$ sampel.

Simulasi bagian pertama mengevaluasi rekonstruksi PSD yang berbasiskan pada tiga metode. Metode pertama adalah



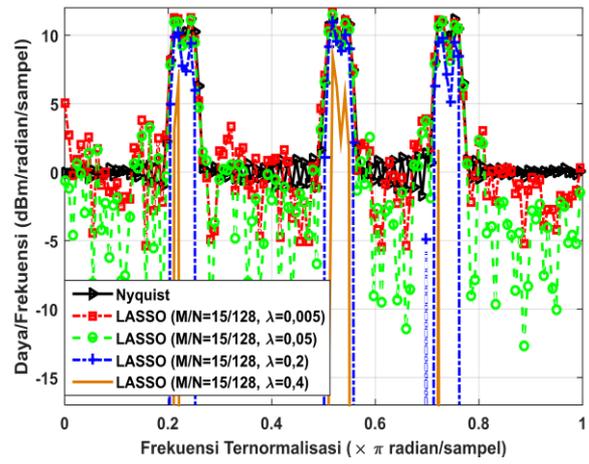
(a)



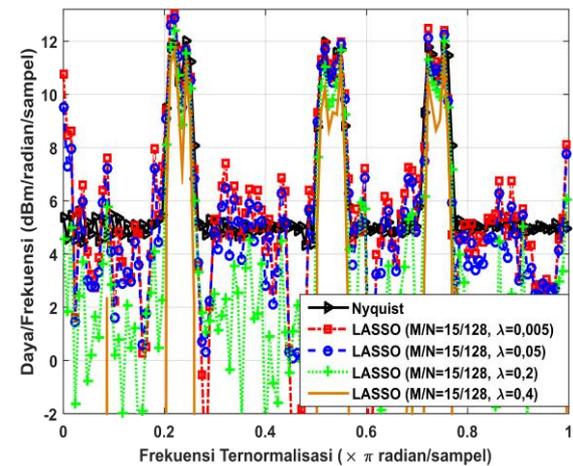
(b)

Gbr. 2 Hasil rekonstruksi PSD dengan metode LS dan CD-LASSO, pada simulasi bagian pertama untuk kasus dengan keberadaan derau yang memiliki daya $\sigma_m^2 = 0$ dBm dan untuk (a) $K=391$ vektor sampel dan (b) $K=3.906$ vektor sampel. Hasil rekonstruksi PSD yang berbasiskan pada hasil pencuplikan Nyquist ditampilkan sebagai referensi.

metode LS yang digunakan untuk merekonstruksi PSD dari sampel-sampel digital yang dihasilkan oleh pencuplikan *multi-coset* dengan nilai $M=20$ (pesat pencuplikan 5/32 kali pesat Nyquist). Perlu diketahui bahwa nilai $M=20$ adalah batas nilai minimal yang masih menjamin agar matriks Φ pada (7) memiliki jumlah baris yang lebih banyak daripada jumlah kolom ($M^2 > 2N-1$) dan *full column rank* (yang merupakan syarat agar rekonstruksi LS pada (8) dapat dilakukan). Untuk memenuhi syarat cukup bagi diperolehnya kondisi *full column rank* pada Φ , literatur terkait [10] menginformasikan bahwa pola pencuplik *multi-coset* yang dipakai (yang tidak lain adalah baris-baris matriks \mathbf{I}_N yang dipilih sebagai baris-baris matriks \mathbf{C} pada (3)) harus merupakan solusi bagi permasalahan penggaris *sparse* (*sparse ruler*) minimal dengan panjang penggaris $N-1 = 127$. Menurut salah satu solusi bagi permasalahan penggaris *sparse* di atas, baris-baris \mathbf{I}_N yang dapat digunakan pada \mathbf{C} guna menjamin kondisi *full column rank* pada Φ adalah baris-baris ke-1, 2, 12, 22, 35, 48, 61, 71, 84, 97, 110, 113, 116, 119, 121, 122, 124, 125, 127, dan 128. Dua metode berikutnya, CD-LASSO dan OMP, digunakan untuk merekonstruksi PSD dari sampel-sampel digital yang



Gbr. 3 Hasil rekonstruksi PSD dengan metode CD-LASSO, untuk empat nilai parameter regularisasi λ yang berbeda, pada simulasi bagian kedua. Daya derau diset dengan $\sigma_m^2 = 0$ dBm dan jumlah vektor sampel K adalah $K=3.906$.



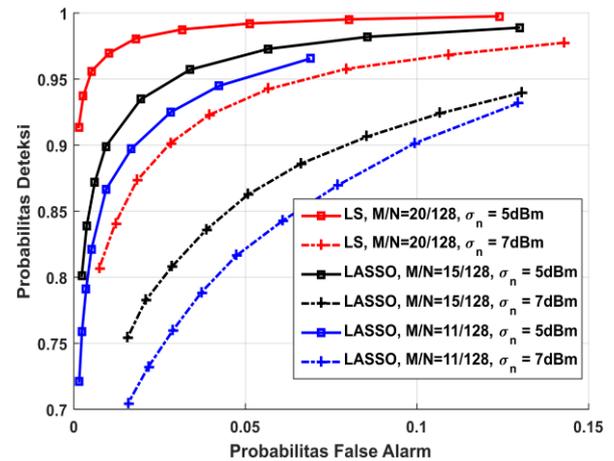
Gbr. 4 Hasil rekonstruksi PSD dengan metode CD-LASSO, untuk empat nilai parameter regularisasi λ yang berbeda, pada simulasi bagian kedua. Daya derau diset dengan $\sigma_m^2 = 5$ dBm dan jumlah vektor sampel K adalah $K=3.906$.

dihasilkan oleh pencuplikan *multi-coset* dengan nilai $M = 15$ (pesat pencuplikan 15/128 kali pencuplikan Nyquist). Pada situasi ini, jumlah baris Φ yang dihasilkan ($M^2 = 225$) lebih kecil daripada jumlah kolom Φ ($2N-1=255$), sehingga SPL pada (7) yang diperoleh bersifat *underdetermined* dan metode LS jelas tidak dapat digunakan. Untuk kasus *underdetermined* ini, 15 baris matriks \mathbf{I}_N yang dipilih sebagai baris-baris matriks \mathbf{C} dapat dipilih dari 20 baris yang sudah digunakan pada \mathbf{C} pada kasus metode LS. Untuk kasus ini, baris-baris \mathbf{I}_N yang digunakan sebagai baris-baris matriks \mathbf{C} adalah baris ke-1, 12, 22, 35, 48, 61, 84, 97, 110, 113, 119, 121, 124, 127, dan 128.

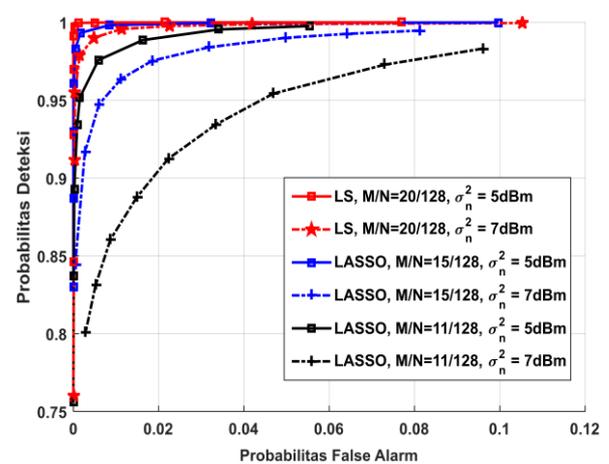
Gbr. 1 mengilustrasikan hasil simulasi bagian pertama untuk kasus tanpa derau, sedangkan Gbr. 2 menggambarkan hasil untuk kasus dengan keberadaan AWGN yang memiliki daya $\sigma_m^2 = 0$ dBm. Jumlah vektor sampel K diset $K = 391$ pada Gbr. 1(a) dan Gbr. 2(a) serta $K = 3.906$ pada Gbr. 1(b) dan Gbr. 2(b) (jumlah sampel yang diperoleh pada tiap metode adalah KM). Plot hasil untuk OMP pada kasus dengan

keberadaan AWGN tidak disediakan karena kualitas hasil PSD yang direkonstruksi terlalu buruk (perlu diingat bahwa OMP pada dasarnya dirancang tanpa mempertimbangkan keberadaan derau). Tampak bahwa pada kasus dengan maupun tanpa derau, kualitas PSD yang direkonstruksi meningkat drastis saat nilai K ditingkatkan hampir sepuluh kali lipat. Tampak pula bahwa pada saat jumlah vektor sampel mulai mencukupi, PSD yang direkonstruksi pada kasus *underdetermined* (baik dengan metode CD-LASSO dan OMP untuk kasus tanpa derau maupun dengan CD-LASSO untuk kasus dengan derau) dapat dengan sangat baik mengidentifikasi pita frekuensi yang diduduki meskipun pesat pencuplikan yang dipakai hanya 15/128 kali pesat pencuplikan Nyquist. Pada kasus tanpa derau, nilai PSD yang dihasilkan oleh metode OMP dan CD-LASSO pada pita frekuensi yang tidak diduduki justru lebih kecil dibandingkan dengan yang dihasilkan oleh metode LS, meskipun OMP dan CD-LASSO digunakan pada kasus dengan pesat pencuplikan yang lebih rendah. Hal ini disebabkan oleh diakomodasinya *sparsity constraint* pada kasus *underdetermined*. Pada kasus dengan derau, diakomodasinya *sparsity constraint* pada proses rekonstruksi PSD dengan CD-LASSO juga mampu menekan daya derau pada hasil PSD yang direkonstruksi. Tampak pada Gbr. 2 bahwa nilai PSD yang direkonstruksi dengan CD-LASSO pada pita frekuensi yang hanya mengandung derau justru lebih kecil daripada daya derau yang sesungguhnya. Meskipun pada konteks estimasi PSD, hasil rekonstruksi dengan menggunakan CD-LASSO ini dapat dipandang tidak akurat (karena daya derau seolah tidak diestimasi dengan benar), pada konteks deteksi, hasil ini cukup membantu dalam mendeteksi keberadaan isyarat yang terkontaminasi oleh derau.

Pada Gbr. 1 dan Gbr. 2, parameter regularisasi λ yang digunakan pada metode CD-LASSO untuk kasus tanpa dan dengan derau berturut-turut adalah $\lambda = 0,01$ dan $\lambda = 0,1$. Nilai-nilai ini dipilih lantaran memberikan hasil rekonstruksi yang lebih baik daripada nilai-nilai λ lainnya. Perlu diingat bahwa nilai parameter λ merupakan kompromi antara tingkat *sparsity* pada $\hat{\mathbf{p}}_s$ dengan besar vektor galat, $\text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_a) - \Psi \hat{\mathbf{p}}_s$. Untuk lebih jelasnya, pada simulasi bagian kedua, rekonstruksi PSD dengan menggunakan metode CD-LASSO dievaluasi untuk nilai λ yang berbeda-beda. Nilai M dan spesifikasi matriks \mathbf{C} yang dipakai pada simulasi bagian kedua ini sama dengan yang dipakai pada kasus *underdetermined* di bagian pertama. Gbr. 3 dan Gbr. 4 mengilustrasikan hasil simulasi bagian kedua untuk kasus daya AWGN berturut-turut sebesar $\sigma_m^2 = 0$ dBm dan $\sigma_m^2 = 5$ dBm. Hasil rekonstruksi PSD yang berdasarkan pada sampel-sampel hasil pencuplikan Nyquist ditampilkan sebagai referensi. Pada kedua gambar tersebut tampak bahwa nilai PSD pada pita frekuensi yang tidak diduduki semakin besar seiring dengan turunnya nilai λ . Sebaliknya, akurasi PSD yang direkonstruksi semakin buruk seiring dengan naiknya nilai λ . Untuk kasus $\sigma_m^2 = 0$ dBm pada Gbr. 3, tampak bahwa nilai $\lambda = 0,05$ memberikan kompromi yang lebih optimal daripada ketiga nilai λ lainnya, karena akurasi PSD yang direkonstruksi masih sangat baik, tetapi nilai PSD pada pita frekuensi yang tidak diduduki tidak sebesar yang ditemukan pada kasus $\lambda = 0,005$. Akan tetapi, jika ditinjau dari keperluan deteksi, hasil rekonstruksi PSD untuk kasus $\lambda = 0,2$ lebih diinginkan, karena walaupun akurasi PSD yang direkonstruksi tidak terlalu baik, daya derau pada



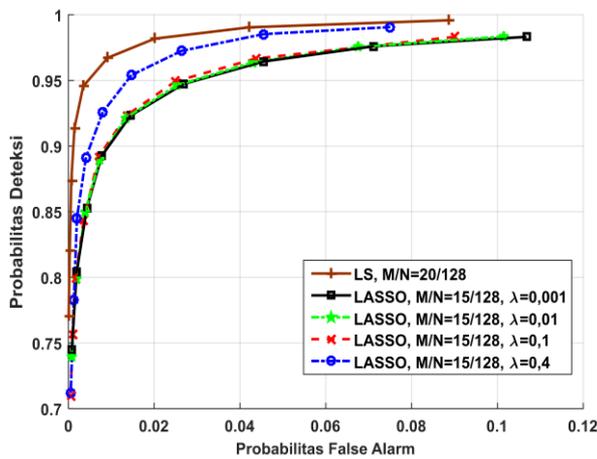
(a)



(b)

Gbr. 5 Kurva probabilitas deteksi dan *false alarm* untuk simulasi bagian ketiga dengan $\lambda = 0,1$. Jumlah vektor sampel adalah (a) $K = 391$ dan (b) $K = 3.906$.

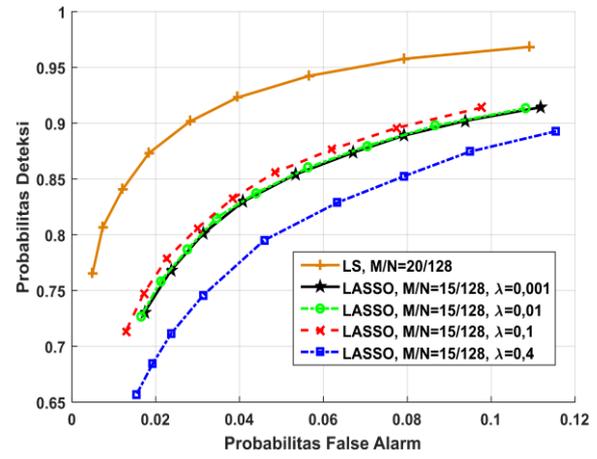
pita frekuensi yang tidak diduduki dapat ditekan, sehingga identifikasi keberadaan isyarat pada pita frekuensi yang diduduki jauh lebih mudah. Untuk kasus $\sigma_m^2 = 5$ dBm pada Gbr. 4, nilai PSD pada pita frekuensi yang tidak diduduki cenderung mulai mendekati level derau yang sesungguhnya untuk $\lambda = 0,05$ dan $\lambda = 0,2$ jika dibandingkan dengan kasus $\sigma_m^2 = 0$ dBm pada Gbr. 3. Hasil rekonstruksi PSD untuk $\lambda = 0,05$ relatif sama dengan hasil untuk $\lambda = 0,005$ sehingga $\lambda = 0,05$ tidak lagi dapat dipandang sebagai nilai yang memberikan kompromi yang lebih optimal dibanding nilai λ lainnya. Sementara itu, untuk kasus $\lambda = 0,2$, daya derau pada pita frekuensi yang tidak diduduki masih lebih rendah jika dibandingkan dengan kasus $\lambda = 0,005$ dan $\lambda = 0,05$, meskipun kualitas rekonstruksi PSD pada pita frekuensi yang diduduki tidak sebaik pada kasus $\lambda = 0,005$ dan $\lambda = 0,05$. Hal yang menarik ditemukan pada kasus $\lambda = 0,4$. Pada Gbr. 3, hasil rekonstruksi PSD untuk kasus $\lambda = 0,4$ sama sekali tidak akurat. Sebaliknya, untuk kasus daya derau yang lebih besar pada Gbr. 4, hasil rekonstruksi PSD yang dihasilkan untuk kasus $\lambda = 0,4$ setidaknya mulai dapat mengidentifikasi pita frekuensi yang diduduki. Hasil ini cukup menggambarkan intuisi yang



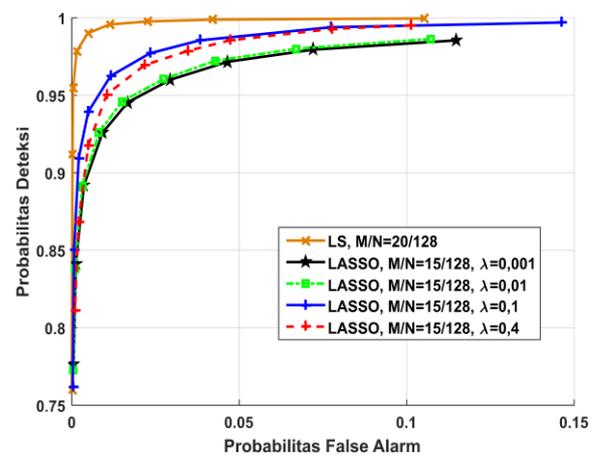
Gbr. 6 Kurva probabilitas deteksi dan *false alarm* untuk simulasi bagian keempat dengan daya derau $\sigma_m^2 = 5\text{dBm}$ dan jumlah vektor sampel adalah $K = 1.172$.

sebetulnya telah tampak pada formula optimasi (18). Saat daya derau kecil, nilai galat yang diindikasikan oleh $\text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_q) - \Psi \hat{\mathbf{p}}_s$ juga akan kecil sehingga adalah hal yang cukup masuk akal apabila bobot yang lebih diberikan pada usaha minimalisasi $\text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_q) - \Psi \hat{\mathbf{p}}_s$ relatif terhadap usaha minimalisasi $\|\hat{\mathbf{p}}_s\|_1$ (yang artinya lebih masuk akal bila nilai λ yang lebih kecil diinginkan). Untuk daya derau yang lebih besar, nilai galat yang diindikasikan oleh $\text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_q) - \Psi \hat{\mathbf{p}}_s$ juga lebih besar, sehingga usaha minimalisasi $\text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_q) - \Psi \hat{\mathbf{p}}_s$ semestinya tidak terlalu dipaksakan sebagaimana pada kasus nilai derau yang kecil (nilai λ yang lebih kecil tidak terlalu diinginkan). Perlu dicatat bahwa analisis di atas tidak berarti bahwa problem optimasi (18) dapat diselesaikan secara naif dengan mengeset λ dengan nilai yang besar untuk kasus daya derau besar dan sebaliknya, dengan nilai yang kecil untuk kasus daya derau kecil, karena baik *tingkat sparsity* maupun akurasi pada estimasi PSD selalu penting untuk berbagai nilai daya derau yang mungkin.

Pada simulasi bagian ketiga dan keempat, kinerja proses rekonstruksi PSD yang berbasis pada (18) untuk kasus keberadaan derau dievaluasi pada konteks aplikasi deteksi. Isyarat WSS yang diterima oleh SU diasumsikan menduduki pita frekuensi $[0, 2\pi \ 0,38\pi]$ dengan PSD isyarat yang diterima pada pita yang diduduki diset pada nilai 10 dBm/radian/sampel. Cara membangkitkan isyarat ini sama dengan cara yang dipakai pada simulasi bagian pertama. Pada simulasi bagian ketiga, evaluasi deteksi berbasis pada hasil rekonstruksi PSD dengan CD-LASSO dan dilakukan untuk dua nilai M/N yang berbeda serta dua nilai daya derau yang berbeda sebagaimana ditampilkan pada Gbr. 5. Evaluasi deteksi dilakukan pada pita frekuensi yang diduduki di atas sedangkan probabilitas *false alarm* dievaluasi pada pita frekuensi yang letaknya cukup jauh dari pita frekuensi yang diduduki (yaitu pada pita frekuensi $[0, 765\pi \ \pi]$). Hasil evaluasi deteksi untuk kasus rekonstruksi dengan LS (dengan $M/N=0,2$) disediakan sebagai referensi. Sebagaimana diperkirakan, untuk ketiga kasus pada Gbr. 5(a), kemampuan deteksi yang lebih baik ditemukan pada situasi dengan nilai daya derau yang lebih kecil. Di samping itu, untuk kasus CD-LASSO,



(a)



(b)

Gbr. 7 Kurva probabilitas deteksi dan *false alarm* untuk simulasi bagian keempat dengan daya derau $\sigma_m^2 = 7 \text{ dBm}$ dan jumlah vektor sampel sebesar (a) $K = 1.172$ dan (b) $K = 2.930$.

nilai M/N yang lebih kecil cenderung menghasilkan kemampuan deteksi yang lebih buruk. Meskipun demikian, Gbr. 5(b) mengindikasikan bahwa penambahan jumlah vektor sampel (yang identik dengan durasi penginderaan yang lebih panjang) dapat memperbaiki kualitas deteksi. Dengan demikian, kualitas deteksi yang memburuk akibat pesat pencuplikan yang lebih rendah umumnya dapat dikompensasi dengan durasi penginderaan yang lebih panjang.

Pada simulasi bagian keempat, evaluasi deteksi berbasis pada hasil rekonstruksi PSD dengan CD-LASSO dan dilakukan untuk empat nilai λ yang berbeda, sebagaimana ditampilkan pada Gbr. 6 dan Gbr. 7. Tampak bahwa nilai λ yang berbeda memberikan kualitas deteksi yang berbeda pula. Sebagai contoh, untuk $K = 1.172$, nilai $\lambda = 0,4$ menghasilkan kualitas deteksi yang lebih baik dibandingkan nilai λ lainnya untuk daya derau $\sigma_m^2 = 5 \text{ dBm}$, tetapi menghasilkan kualitas deteksi yang lebih buruk untuk daya derau $\sigma_m^2 = 7 \text{ dBm}$. Hal ini sekaligus mempertegas pernyataan sebelumnya bahwa problem optimasi (18) tidak dapat diselesaikan secara naif dengan mengeset λ dengan nilai yang besar untuk situasi dengan daya derau cukup besar. Meskipun demikian, untuk

$\sigma_m^2 = 7$ dBm, kualitas deteksi yang dihasilkan untuk $\lambda = 0,4$ segera membaik saat jumlah vektor sampel K dinaikkan menjadi $K = 2.930$ sebagaimana diperlihatkan pada Gbr. 7(b) dan kualitas deteksi yang dihasilkan melampaui kualitas deteksi yang dihasilkan untuk $\lambda = 0,001$ dan $\lambda = 0,01$.

VI. KESIMPULAN

Makalah ini mengevaluasi rekonstruksi PSD berbasis sampel-sampel digital yang dihasilkan melalui pencuplikan dengan pesat jauh di bawah pesat Nyquist sedemikian rupa sehingga SPL yang dihasilkan bersifat *underdetermined*. Pada situasi ini, asumsi *sparsity* dapat diterapkan pada PSD yang direkonstruksi sejauh asumsi *sparsity* tersebut valid (misalnya pada aplikasi penginderaan spektrum untuk CR). Dua buah metode rekonstruksi yang dievaluasi adalah OMP dan CD-LASSO. Menurut hasil simulasi, untuk kasus sistem *underdetermined*, kualitas PSD yang direkonstruksi dengan menggunakan CD-LASSO masih dapat memberikan hasil rekonstruksi yang cukup baik untuk kasus tanpa maupun dengan derau (dengan nilai σ_m^2 hingga 5dBm dan daya isyarat sebesar 10 dBm) selama durasi proses penginderaan mencukupi. Di samping itu, saat hasil rekonstruksi PSD dengan CD-LASSO digunakan untuk melakukan proses deteksi, kualitas deteksi yang cukup baik dapat diperoleh selama panjang durasi penginderaan mampu mengompensasi pesat pencuplikan yang rendah. Perlu diperhatikan bahwa untuk memperoleh kualitas rekonstruksi PSD dan kualitas deteksi yang mencukupi, kompromi yang tepat antara batasan *sparsity* dan besar vektor galat harus diperoleh dengan menetapkan nilai parameter regularisasi yang tepat. Sementara itu, algoritme OMP hanya dapat bekerja dengan baik pada kasus tanpa derau.

REFERENSI

- [1] M. Unser, "Sampling-50 years after Shannon," *Proceeding of the IEEE*, Vol. 88, No. 4, hal. 569–587, Apr. 2000.
- [2] B. Le, T. Rondeau, J. Reed, dan C. Bostian, "Analog-to-digital Converters," *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 22, No. 6, hal. 69–77, Nov. 2005.
- [3] D.L. Donoho, "Compressed Sensing," *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 52, No. 4, hal. 1289–1306, Apr. 2006.
- [4] J.A. Tropp dan A. Gilbert, "Signal Recovery from Random Measurements Via Orthogonal Matching Pursuit," *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 53, No. 12, hal. 4655–4666, Des. 2007.
- [5] S.S. Chen, D.L. Donoho, dan M.A. Saunders, "Atomic Decomposition by Basis Pursuit," *Siam Review*, Vol. 43, No. 1, hal. 129–159, 2001.
- [6] R. Tibshirani, "Regression Shrinkage and Selection Via the Lasso: A Retrospective," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol. 73, No. 3, hal. 273–282, Jun. 2011.
- [7] D. Needell dan J.A. Tropp, "CoSaMP: Iterative Signal Recovery from Incomplete and Inaccurate Samples," *Applied and Computational Harmonic Analysis Elsevier*, Vol. 26, No. 3, hal. 301–321, Mei 2009.
- [8] I. Budiarto, H. Nikoobar, dan L.P. Lighthart, "Cognitive Radio Modulation Techniques: Reducing Mutual Interference," *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 25, No. 6, hal. 24–34, Nov. 2008.
- [9] S. Haykin, "Cognitive Radio: Brain Empowered Wireless Communications," *IEEE Journal on Selected Area in Communications*, Vol. 23, No. 2, hal. 201–220, Feb. 2005.
- [10] D.D. Ariananda, "Compressive Power Spectral Analysis", Ph.D thesis, Technische Universiteit Delft, Delft, The Netherlands, Mar. 2015.
- [11] M.A. Lexa, M.E. Davies, J.S. Thompson, dan J. Nikolic, "Compressive Power Spectral Density Estimation," *Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 2011, hal. 3884-3887.
- [12] C.P. Yen, Y. Tsai, dan X. Wang, "Wideband Spectrum Sensing Based on Sub-Nyquist Sampling," *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 61, No. 12, hal. 3028–3040, Jun. 2013.
- [13] D. Cohen dan Y.C. Eldar, "Sub-Nyquist Sampling for Power Spectrum Sensing in Cognitive Radios: A Unified Approach," *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 62, No. 15, hal. 3897-3910, Agt. 2014.
- [14] Z. Tian dan G.B. Giannakis, "Compressed Sensing for Wideband Cognitive Radios," *Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 2007, hal. IV/1357-IV/1360.
- [15] Z. Tian, "Compressed Wideband Sensing in Cooperative Cognitive Radio Networks," *Proc. of IEEE Global Telecommunications Conference*, 2008, hal. 1-5.
- [16] F. Zeng, C. Li, dan Z. Tian, "Distributed Compressive Spectrum Sensing in Cooperative Multihop Cognitive Networks," *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, Vol. 5, No. 1, hal. 37–48, Feb. 2011.
- [17] Y. Wang, Z. Tian, dan C. Feng, "A Two-Step Compressed Spectrum Sensing Scheme for Wideband Cognitive Radios," *Proc. of IEEE Global Telecommunications Conference*, 2010, hal. 1-5.
- [18] Z. Qin, Y. Gao, M.D. Plumbey, dan C.G. Parini, "Wideband Spectrum Sensing on Real-Time Signals at Sub-Nyquist Sampling Rates in Single and Cooperative Multiple Nodes," *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 64, No. 12, hal. 3106-3117, Jun. 2016.
- [19] H. Sun, W.-Y. Chiu, dan A. Nallanathan, "Adaptive Compressive Spectrum Sensing for Wideband Cognitive Radios," *IEEE Communication Letters*, Vol. 16, No. 11, hal. 1812–1815, Nov. 2012.
- [20] Z. Qin, Y. Gao, dan C.G. Parini, "Data-Assisted Low Complexity Compressive Spectrum Sensing on Real-Time Signals Under Sub-Nyquist Rate," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, Vol. 15, No. 2, hal. 1174-1185, Feb. 2016.
- [21] Z. Qin, J. Wang, J. Chen, dan L. Wang, "Adaptive Compressed Spectrum Sensing Based on Cross Validation in Wideband Cognitive Radio System," *IEEE Systems Journal*, Vol. 11, No. 4, hal. 2422-2431, Des. 2017.
- [22] Y. Wang, Z. Tian, dan C. Feng, "Sparsity Order Estimation and Its Application in Compressive Spectrum Sensing for Cognitive Radios," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, Vol. 11, No. 6, hal. 2116-2125, Jun. 2012.
- [23] P. Stoica dan R.L. Moses, *Spectral Analysis of Signals*, Uppl saddle River, New Jersey, USA: Prentice-Hall, Inc., 2005.
- [24] R. Venkataramani dan Y. Bresler, "Optimal Sub-Nyquist Nonuniform Sampling and Reconstruction for Multiband Signals," *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 49, No. 10, hal. 2301-2313, Okt. 2001.
- [25] M. Mishali dan Y.C. Eldar, "Blind Multiband Signal Reconstruction: Compressed Sensing for Analog Signals," *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 57, No. 3, hal. 993-1009, Mar. 2009.
- [26] M. Mishali dan Y.C. Eldar, "From Theory to Practice: Sub-Nyquist Sampling of Sparse Wideband Analog Signals," *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, Vol. 4, No. 2, hal. 375-391, Apr. 2010.
- [27] J.A. Tropp, J.N. Laska, M.F. Duarte, J.K. Romberg, dan R.G. Baraniuk, "Beyond Nyquist: Efficient Sampling of Sparse Bandlimited Signals," *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 56, No. 1, hal. 520-544, Jan. 2010.
- [28] S.S. Gishkori, "Compressive Sampling for Wireless Communications", Ph.D thesis, Technische Universiteit Delft, Delft, The Netherlands, Jun. 2014.
- [29] Y.C. Eldar dan G. Kutyniok, *Compressed Sensing: Theory and Applications*, Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2012.
- [30] E.J. Candes, J. Romberg, dan T. Tao, "Robust Uncertainty Principles: Exact Signal Reconstruction from Highly Incomplete Frequency Information," *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 52, No. 2, hal. 489–509, Feb. 2006.